第17卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 17 No. 4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

关于Genocchi数和Riemann Zeta-函数的一些恒等式*

王天明 张祥德
(大连理工大学数学科学研究所, 116024) (南开数学研究所, 天津300071)

摘 要 利用计算技巧给出了由Genocci数和Riemann Zeta-函数组成的和式的递归关系, 得到了一些关于Genocchi数和Riemann Zeta-函数的恒等式

关键词 生成函数, 递归关系, 恒等式, Genocchi数, Riemann Zeta-函数
分类号 AMS(1991) 05A19/CCL O157.1

1 主要结果

形如下列和式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{B_{2a_1}B_{2a_2}\cdots B_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!} \tag{1}$$

的研究时常引起人们的兴趣, 见[1], [4], [5], [6]等. 这里 $n\geq k$ 为正整数, $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ 表示对所有满足该式的 k 维正整数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 求和. 关于和式(1)的主要研究方法是对 $k=1, 2, \cdots, 7$, 逐个利用微分技巧找 B_n 的生成函数 $f(x)$ 的 k 次幂 $f^{(k)}(x)$ 和 $f(x)$, $f'(x)$ 等之间的关系, 然后用 B_n 将(1)式表示出来. 显见其计算量大, 且不易求得 k 较大时的和式表示. 本文利用一些技巧给出了下列和式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!} \tag{2}$$

与

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}(1-2^{2a_1})\cdots(1-2^{2a_k})\xi(2a_1)\cdots\xi(2a_k) \tag{3}$$

的递归关系和一些恒等式. 这里 G_n 和 $\xi(n)$ 分别表示Genocchi数和Riemann Zeta-函数.

主要结果如下:

定理1

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n\\ n\geq k+1}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_{k+1}}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_{k+1})!} = \frac{4n-2k}{k}\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}$$

* 1995年5月10日收到. 国家自然科学基金资助项目.

$$+\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=n-1}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_{k-1}}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_{k-1})!}.$$

推论1

$$\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ n\geq 2}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}}{(2a_1)!(2a_2)!}=\frac{G_{2n}}{n(2n-2)!}.$$

推论2

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=n\\ n\geq 3}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}G_{2a_3}}{(2a_1)!(2a_2)!(2a_3)!}=\frac{G_{2n}}{n(n-3)!}+\frac{G_{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

推论3

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3+a_4=n\\ n\geq 4}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}G_{2a_3}G_{2a_4}}{(2a_1)!(2a_2)!(2a_3)!(2a_4)!}$$

$$=\frac{2G_{2n}}{3n(2n-4)!}+\frac{4G_{2n-2}}{3(n-1)!(2n-4)!}.$$

推论4

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=n\\ n\geq 5}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_5}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_5)!}$$

$$=\frac{G_{2n}}{3n(2n-5)!}+\frac{5G_{2n-2}}{3(n-1)!(2n-5)!}+\frac{G_{2n-4}}{(2n-4)!}.$$

继续利用定理1可得到更多的和式,这里就不细列了.

关于 Riemann Zeta-**函数** $\xi(n)$ **有**

定理2

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n\\ n\geq k+1}}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_{k+1}})\xi(2a_1)\xi(2a_2)\cdots\xi(2a_{k+1})$$

$$=\frac{k-2n}{2k}\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_k})\xi(2a_1)\cdots\xi(2a_k)$$

$$-\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=n-1}\frac{\pi^2}{4}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_{k-1}})\xi(2a_1)\cdots\xi(2a_{k-1}).$$

推论5

$$\sum_{\substack{a_1+a_2=n\\ n\geq 2}}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\xi(2a_1)\xi(2a_2)=\frac{1-2n}{2}(1-2^{2n})\xi(2n).$$

推论6

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=n\\ n\geq 3}}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})(1-2^{2a_3})\xi(2a_1)\xi(2a_2)\xi(2a_3)$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{4}(1-2^{2n})\xi(2n)-\frac{\pi^2}{4}(1-2^{2n-2})\xi(2n-2).$$

推论7

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3+a_4=n\\ n\geq 4}}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_4})\xi(2a_1)\xi(2a_2)\cdots\xi(2a_4)$$

$$=\frac{1}{24}(1-n)(1-2n)(3-2n)(1-2^{2n})\xi(2n)-\frac{\pi^2}{6}(3-2n)(1-2^{2n-2})\xi(2n-2).$$

推论8

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_5=n\\ n\geq 5}}(1-2^{2a_1})(1-2^{2a_2})\cdots(1-2^{2a_5})\xi(2a_1)\xi(2a_2)\cdots\xi(2a_5)$$

$$=\frac{1}{96}(n-1)(n-2)(2n-1)(2n-3)(1-2^{2n})\xi(2n)$$

$$-\frac{5\pi^2}{48}(n-2)(2n-3)(1-2^{2n-2})\xi(2n-2)+\frac{\pi^4}{16}(1-2^{2n-4})\xi(2n-4).$$

2　定理的证明

Genocchi 数的定义如下

$$\frac{2t}{e^t+1}=\sum_{n\geq 1}G_n\frac{t^n}{n!},\quad G_1=1,G_{2n+1}=0,n\geq 1 \tag{4}$$

Genocchi 数的性质及组合解释见[2]和[3].

取

$$g(t)=\frac{2t}{e^t+1}-t=\sum_{n\geq 1}\frac{G_{2n}}{(2n)!}t^{2n}, \tag{5}$$

则有

$$tg'(t)=-\frac{1}{2}t^2+g(t)+\frac{1}{2}g^2(t). \tag{6}$$

又 $(tg^n(t))'=g^n(t)+ntg^{n-1}(t)g'(t)$, 故有

$$(tg^n(t))'=(n+1)g^n(t)+\frac{n}{2}g^{n+1}(t)-\frac{n}{2}t^2g^{n-1}(t). \tag{7}$$

将(5)代入(7)中, 并比较 t^n 的系数, 整理得

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n\\ n\geq k+1}}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_{k+1}}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_{k+1})!}$$

$$=\frac{4n-2k}{k}\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_k}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_k)!}$$

$$+\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=n-1}\frac{G_{2a_1}G_{2a_2}\cdots G_{2a_{k-1}}}{(2a_1)!(2a_2)!\cdots(2a_{k-1})!}.$$

定理1得证.

在定理1中取 $k=1$ 得推论1. 推论2—4可类似地得到.

利用 Genocchi 数和 Riemann Zeta-函数的关系

$$G_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{4(1-2^{2n})(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\xi(2n)$$

和定理1可得定理2, 其推论可类似地证明.

由于有了递归关系, 计算变得容易多了. 通过定理1和定理2中的递归关系, 可以得到 k 为任意值时的和式表示.

参 考 文 献

[1] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part I, Springer, Berlin and New York, 1985.

[2] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, Reidcl, Boston, Mass., 1974.

[3] M. L. Platonov, Discrete Math. Appl. 2: 5(1992), 505- 522.

[4] R. S. Rao and B. Davis, Indian J. Pure. Appl. Math., 17(1986), 1175- 1186.

[5] A. Sankaranaryanan, Indian J. Pure. Appl. Math., 18(1987), 794- 800.

[6] 张文鹏, 科学通报, 4(1991), 250- 253.

[7] 张祥德, 大连理工大学博士论文, 1994. 1.

Some Identities Related to Genocchi Numbers and Riemann Zeta-Function

Wang Tianming

(Inst. of Math. Scis, Dalian University of Technology, 116024)

Zhang Xiangde

(Nankai Mathematical Inst., Tianjin 300071)

Abstract

In this paper, recurrencs on summations of Genocchi numbers and Riemann Zeta-function are given by calculation technique respectively. Therefore, some identities related to Genocchi number and Riemann Zeta function are obtained.

Keywords genarating function, recurrence, identity, genocchi number, Riemann Zeta function.