无序划分的方法数p(n)的上界*

周 学 松
(华东交通大学基础部, 南昌330013)

摘　要　本文对无序划分的方法数 $p(n)$ 的上界作了进一步的改进, 得到结果:

$$p(n)<\frac{\pi^2}{\sqrt{9+6\pi^2(n-1)}+3}e^{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 n-\frac{2}{3}\pi^2+1}}.$$

关键词　划分, 生成函数, F-级数
分类号　AMS(1991) 20D60/CCL O152.1

D. A. Cohen 在文[1]中对正整数 n 的无序划分的方法数 $p(n)$ 给出一个上界: $p(n)<e^{\sqrt{9n}}$. 罗彩明在文[2]中改进了该结果为: $p(n)<e^{\sqrt{8n}}$. 华罗庚在《数论导引》[3]中给出一个渐近式: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln p(n)}{\sqrt{n}}=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 本文在上述基础上得到:

定理　对所有正整数 n, $p(n)<\frac{\pi^2}{\sqrt{9+6\pi^2(n-1)}+3}e^{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 n-\frac{2}{3}\pi^2+1}}$.

证明　$p(n)$ 的生成函数为

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

$$\Rightarrow \ln G(x)=-\ln(1-x)-\ln(1-x^2)-\ln(1-x^3)-\cdots.$$

由对数的泰勒展开式知

$$\ln G(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots,$$

对于 $\frac{x^n}{1-x^n}$, 设 $x\in(0,1)$, 则有

$$x^{n-1}<x^{n-2}<\cdots<x^3<x^2<x<1$$

$$\Rightarrow x^{n-1}<\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{n}\Rightarrow\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}<\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}<\frac{1}{n}\frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \ln G(x)<\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{x}{1-x}+\cdots$$

$$=\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}.$$

* 1994年12月27日收到

又因

$$
\begin{aligned}
G(x) &= p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\cdots+p(n)x^n+\cdots \\
&> p(n)x^n+p(n+1)x^{n+1}+\cdots+p(n+2^k-1)x^{n+2^k-1} \quad (k\in N) \\
&> p(n)x^n(1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1}) \\
&= p(n)x^n(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{k-1}}) \\
&= p(n)x^n\frac{1-x^{2^k}}{1-x},
\end{aligned}
$$

上式两边取 $k\to+\infty$ 时的极限, 并注意极限的保号性, 得

$$
G(x)=\lim_{k\to+\infty}G(x)\geq\lim_{k\to+\infty}p(n)x^n\frac{1-x^{2^k}}{1-x}=p(n)\frac{x^n}{1-x}
$$

$$
\Rightarrow \ln p(n)\leq\ln G(x)-(n-1)\ln x-\ln\frac{x}{1-x}<\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}+(n-1)\frac{1-x}{x}-\ln\frac{x}{1-x}.
$$

取 $y=\dfrac{x}{1-x}$, 则

$$
f(x)=\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}+(n-1)\frac{1-x}{x}-\ln\frac{x}{1-x}=\frac{\pi^2}{6}y+\frac{n-1}{y}-\ln y=g(y)
$$

$$
\Rightarrow g'(y)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{n-1}{y^2}-\frac{1}{y}\overset{\text{令}}{=}0\Rightarrow\frac{\pi^2}{6}y^2-y-(n-1)=0.
$$

解得

$$
y=\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\pi^2(n-1)}}{\pi^2/3}\qquad(y>0)
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \ln p(n) &< \frac{\pi^2}{6}\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\pi^2(n-1)}}{\pi^2/3} \\
&\quad +(n-1)\frac{\pi^2/3}{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\pi^2(n-1)}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\pi^2(n-1)}}{\pi^2/3} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 n-\frac{2}{3}\pi^2+1}-\ln\frac{\sqrt{1+\frac{2}{3}\pi^2(n-1)}+1}{\pi^2/3}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow p(n)<\frac{\pi^2}{\sqrt{9+6\pi^2(n-1)}+3}e^{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^2 n-\frac{2}{3}\pi^2+1}}. \qquad \square
$$

参　考　文　献

[1] D. A. Cohen, *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, 1978.

[2] 罗彩明, 对 D. A. Cohen 的一个划分数不等式定理的改进, 应用数学 2(1994), 252-253.

[3] 华罗庚, 数论导引, 科技出版社, 1957.