第 18 卷第 3 期
1998 年 8 月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 18 No. 3
Aug. 1998

直径为 5 的整树新类*

李　袁

(五邑大学数理系, 广东江门 529020)

摘　要　本文通过更广泛的二次不定方程 $d_1x^2 - d_2y^2 = 1$ 的解, 构造出了更多的直径为 5 的整树.

关键词　整树, 二次不定方程.

分类号　AMS(1991) 05C15/ CCL O157.5

一个图的特征多项式之根均为整数, 则称此图为整图.

设 $T(m, r)$ 是用一条新边联结两个星图 $k_{1,m}$, $k_{1,r}$ 的中心得到的图, $T_t(m, r)$ 是由 $T(m, r)$ 的每个顶点联结 t 个新顶点得到的图, 则 $T_t(m, r)$ 是直径为 5 的树, 由[3]知其特征多项式为:

$$x^{(m+r+2)(t-1)}(x^2 - t)^{m+r-2}[(x^2 - t)^4 - (m + r + 1)x^2(x^2 - t)^2 + mrx^4],$$

从而对应于方程组

$$\begin{cases} m + r + 1 = a^2 + b^2, \\ mr = a^2b^2, \\ m \neq r \end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$x(n)=\frac{\varepsilon_1^n+\bar{\varepsilon}_1^n}{2\sqrt{d_1}},\quad y(n)=\frac{\varepsilon_1^n-\bar{\varepsilon}_1^n}{2\sqrt{d_2}},2\nmid n. \tag{4}$$

引理 2　**方程组**(1)**的全部正整数解** m, r, a, b **为**:(**不考虑** $m, r; a, b$ **的互换**)

$$\begin{cases} m=x^2(k)y^2(l)d, \quad r=x^2(l)y^2(k)d, \\ a=x(k)x(l)d_1, \quad b=y(k)y(l)d_2, \\ \qquad k\neq l, 2\nmid kl, k, l\in N \end{cases} \tag{6}$$

证明　**首先将证明**(1)**之解一定可写成**(5)**、**(6)**的形式**.

设$(m, r)=du^2$,**其中** d **无平方因子**,**由算术基本定理易证方程** $mr=a^2b^2$ **的全部正整数解为**

$$\begin{cases} m=a_1^2b_1^2d, \qquad r=a_2^2b_2^2d, \\ a=a_1a_2d_1, \qquad b=b_1b_2d_2, \end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

由 $m \neq r$ 知 $k \neq l$. 即此时的解写成了(6)的形式.

反过来,要说明(5),(6)均使(1)成立. 直接将(5)式的 m, r, a, b 的表达式代入(1)的前 2 个等式知其成立. 以下说明 $m \neq r$.

假定 $m = r$,则 $x^2(k) : y^2(k) = x^2(l) : y^2(l)$,联立 $d_1 x^2(k) - d_2 y^2(k) = 1$, $d_1 x^2(l) - d_2^2 y^2(l) = 1$ 可得 $y^2(k) = y^2(l)$,即 $y(k) = y(l)$ 和 $x^2(k) = x^2(l)$,即 $x(k) = x(l)$. 因 $x(n)$ 关于 n 单调增,由此可知 $k = l$,矛盾.

同理可证(6)满足(1). □

引理 3[3] 不定方程 $x^2 = y(y+z)$ 的全部正整解可表为 $x = pc_1c_2$, $y = pc_1^2$, $z = p(c_2^2 - c_1^2)$,这里 $c_2 > 0$, $c_1 > 0$ 均为整数, $(c_1, c_2) = 1$, p 为整数, $p > 0$.

定理 1 设 $d > 1$ 无平方因子, $d = d_1 d_2$, $d_1 > 1$ 使 $d_1 x^2 - d_2 y^2 = 1$ 有解, $x(k)$, $y(k)$ 由(4)定义,则当 $m = x^2(k) y^2(l) d$, $r = x^2(l) y^2(k) d$, $t = \left(\frac{x^2(k) - x^2(l)}{4}\right)^2 d_1^2$, $k \neq l$, $2 \nmid kl$ 时, $T_t(m, r)$ 是直径为 5 的整树.

证明 取 $a = x(k) x(l) d_1$, $b = y(k) y(l) d_2$,由引理 2 知 m, r, a, b 满足(1). 以下说明对于这些 a, b, t (2)有整数解,从而定理获证. 由引理 3 只需说明下列方程组:

$$\begin{cases} p(c_2^2 - c_1^2) = x(k) x(l) d_1, \\ p(c_2'^2 - c_1'^2) = y(k) y(l) d_2, \\ pc_1c_2 = pc_1'c_2', \\ (pc_1c_2)^2 = t \end{cases} \tag{12}$$

由于 $2 \nmid kl$,故

$$\begin{aligned} x(k)\sqrt{d_1} + y(k)\sqrt{d_2} &= [x(l)\sqrt{d_1} + y(l)\sqrt{d_2}](x_1\sqrt{d_1} + y_1\sqrt{d_2})^{2\frac{k-l}{2}} \\ &= [x(l)\sqrt{d_1} + y(l)\sqrt{d_2}](2x_1^2 d_1 - 1 + 2x_1 y_1\sqrt{d})^{\frac{k-l}{2}} \\ &= [x(l)\sqrt{d_1} + y(l)\sqrt{d_2}](2A + 1 + 2B\sqrt{d}), \end{aligned}$$

A, B 为整数. 由此易知 $x(k) \equiv x(l)$, $y(k) \equiv y(l) \pmod 2$,这说明 t 以及(12)给出的 c_1, c_2, c_1', c_2' 均为整数,最后由于

$$\begin{aligned} pc_1c_2 - pc_1'c_2' &= d_1c_1c_2 - d_2c_1'c_2' = d_1\frac{x^2(k) - x^2(l)}{4} - d_2\frac{y^2(k) - y^2(l)}{4} \\ &= \frac{1}{4}[(d_1x^2(k) - d_2y^2(k)) - (d_1x^2(l) - d_2y^2(l))] = 0, \\ (pc_1c_2)^2 &= (d_1c_1c_2)^2 = \left(\frac{x^2(k) - x^2(l)}{4}d_1\right)^2 = t, \end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

已证明(11)有解. □

定理 2 设 $d>1$ 无平方因子, $X(k)$, $Y(k)$ 由(3)式所定义

$$m = X^2(k)\ Y^2(l)\ d,\ r = X^2(l)\ Y^2(k)\ d,\ t = \left(\frac{X^2(k) - X^2(l)}{4}\right)^2,\ k \neq l,$$

则当 $2\nmid x_o$,或 $2|\ x_o$ 且 $k \equiv l\ (\mathrm{mod}2)$ 时, $T_t(m, r)$ 为直径是 5 的整树,其中 $x_o + y_o\sqrt{d} = \varepsilon_o$ 是 Pell 方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 的基本解.

证明 由于 $x_o^2 - dy_o^2 = 1$,故 $2\nmid x_o$ 则必 $2|\ y_o$.

由 $X(n) + Y(n)\sqrt{d} = (x_o + y_o\sqrt{d})^n$ 易证 $X(n) \equiv 1$, $Y(n) \equiv 0\ (\mathrm{mod}2)$, $n = 1, 2, \cdots$

余下的证明完全类似定理 1.

显然,[3]中关于直径 5 的整树的结果是本文定理 1 中 $d_1 = d$,和定理 2 中 k, l 均偶的特殊情形.

最后,指出确实存在很多 d_1, d_2 使 $d_1 x^2 - d_2 y^2 = 1$ 有解. 实际上,取 $d_2 = d_1 - 1$,且 d_1, $d_1 - 1$ 均无平方因子,则对应的方程总有解,其基本解均为 $\sqrt{d_1} + \sqrt{d_1 - 1}$.

作者感谢袁平之博士有益的建议.

参 考 文 献

[1] 李学良、林国宁, 关于整树问题, 科学通报, 32:11(1987), 813—816.

[2] 刘儒英, 直径为 5 的整树, 系统科学与数学, 8:4(1988), 357—360.

[3] 曹珍富, 直径为 5,6 的整树的一些新类, 系统科学与数学, 11:1(1991), 20—26.

[4] 周持中, 斐波那契——卢卡斯序列及其应用, 湖南科学技术出版社, 1993, 290—300.

A Class of New Integral Trees with Diameter 5

Li Yuan

(Dept. of Math. & Phys., Wuyi University, Guangdong Jiangmen 529020)

Abstract

In this paper, we constract a class of new integral trees with diameber 5 by using the solution of some quadratic Diophantine equations.

Keywords integral tree, quadratic diophantine equation.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.