第18卷第4期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 4
1998年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1998

关于高阶Euler多项式的一点注记*

张 之 正
(洛阳师范高等专科学校数学系, 洛阳471022)

对任何复数 x, 考虑幂级数展开式: $\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^k e^{xt}=\sum_{n\geq 0}E_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}$ $|t|<\pi$, 则函数 $E_n^{(k)}(x)$ 称为 k 阶 Euler 多项式[1]. 特别地, $E_n^{(1)}(x)=E_n(x)$ 为普通 Euler 多项式; $E_n=2^nE_n(\frac{1}{2})$ 为 Euler 数, 并且 $E_{2n+1}=0\,(n\geq 0)$[2]. 本短记得到:

定理1 $$\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\frac{E_{n_1}^{(k_1)}(x_1)}{n_1!}\cdots\frac{E_{n_m}^{(k_m)}(x_m)}{n_m!}=\frac{1}{n!}E_n^{(k_1+\cdots+k_m)}(x_1+\cdots+x_m).$$

定理2 $$\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\frac{E_{2n_1}}{(2n_1)!}\cdots\frac{E_{2n_m}}{(2n_m)!}=\frac{4^n}{(2n)!}E_{2n}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right).$$

定理3 $$E_n^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)=-\frac{4}{(m-1)(m-2)}E_{n+2}^{(m-2)}\left(\frac{m-2}{2}\right)+\frac{m-2}{m-1}E_n^{(m-2)}\left(\frac{m-2}{2}\right)\quad(m>2).$$

定理4 $E_n^{(2)}(1)=\frac{4}{n+2}(2^{n+2}-1)B_{n+2}$, 这里 B_n 为Bernoulli数

张文鹏在文[3]和辛小龙、张建康在文[4]利用函数方程讨论了 Euler 数的多重和:

$$\sum_{n_1+n_m=n}\frac{E_{2n_1}}{(2n_1)!}\cdots\frac{E_{2n_m}}{(2n_m)!},$$

给出了 $m=2,3,4,5,7$ 的结果, 而利用本文的定理2～4, 去求解一般情形的多重和, 要比文[3], [4]简便得多.

注 本文所言的 Euler 数与文[3], [4]有点不同之处, 即文[3], [4]的 Euler 数

$$E_{2n}'=(-1)^nE_{2n},$$

因此, 它们之间互换亦容易.

参 考 文 献

1 Mclarthy P J. *Some irreducibility theorems for Bernoulli polynomials of higher order*. Duke Math. J., 1960, **27**: 313-318
2 Gradshteyn I S and Ryzhik IM. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, 1980.
3 张文鹏. 关于 Euler 数的几个恒等式. 西北大学学报(自), 1992, **1**: 17-20
4 辛小龙、张建康. 联系 Euler 数和Bernoulli数的一些恒等式. 纯粹数学与应用数学, 1993, **9**(1): 23-28
5 贾士代、张之正. 关于高阶Bernoulli、Euler 多项式的几个恒等式及其应用. 宝鸡文理学院学报(自), 1993, **1**: 60-62

* 1995年9月11日收到. 1997年10月22日收到修改稿

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.