第19卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 19 No. 4
1999年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1999

退化拟共形映射的整体同胚与二维奇异积分方程*

黄 新 民

(广西大学数学与信息科学系，南宁 530004)

摘　要：设 D 是一个边界 $\Gamma\in C_\alpha^1(0<\alpha\leqslant 1)$ 的有界单连通域，复函数 $q(z)\in C_\alpha^1$，$|q(z)|\leqslant 1$，等式只能在 Γ 上成立，且在 Γ 上等式 $q(z(t))\overline{z'(t)}/z'(t)+1|_{z\in\Gamma}=0$ 最多在有限个点上成立. 本文给出了复伸张 $q(z)$ 满足上述条件时的退化拟共形映射的整体同胚解及以 $q(z)$ 为系数的一类二维奇异积分方程的解.

关键词：退化；拟共形映射；整体同胚；二维；奇异积分方程.

分类号：AMS(1991) 45E99/CLC O175.5

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0709-07

设 D 是一个有界单连通域，作者已经在文献 [1] 中证明

定理 1　设 D 是一个边界 $\Gamma: z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)\in C_\alpha^1(0<\alpha\leqslant 1)$ 的有界单连通域. 如果 $q(z)$ 满足下面的条件：

1)　$q(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$；

2)　对于 $z\in\overline{D}$ 成立 $|q(z)|\leqslant 1$，且等式至多在 $z\in\Gamma$ 上成立；

3)　如果 $z_0\in\Gamma$ 时有 $|q(z_0)|=1$，则 $q(z)$ 在点 $z=z_0$ 处的法向导数不为零；

4)　$q(z(t))\overline{z'(t)}/z'(t)+1=0$ 只能在 Γ 的有限个点上成立，

则成立下面结论：

1)　Beltrami 方程

$$w_{\bar z}-q(z)w_z=0 \tag{1}$$

的每一个广义解 $w=w(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$；

2)　若 Beltrami (1) 有同胚解 $w=\varphi(z)$ 同胚映射 D 为单位圆盘 $\triangle$，则解 $w=\varphi(z)$ 能够延拓为 $\overline{D}$ 到 $\overline{\triangle}$ 的同胚，其逆函数 $z=\varphi^{-1}(w)\in C_\alpha(\overline{\triangle})$.

本文根据这个定理的结论证明了下列两个定理

定理 2　在与定理 1 相同的条件下，成立

(Ⅰ)　存在从 z 平面到 ζ 平面的整体同胚 $\zeta=\zeta(z)$ 使得成立

* **收稿日期**：1996-10-14
基金项目：广西壮族自治区教育厅自然科学基金资助课题(桂教科[1998]69号)
作者简介：黄新民(1945-)，男，广西贺州市人，硕士，广西大学教授.

$$\begin{cases}\zeta_{\bar z}-q(z)\zeta_z=0, & 若\quad z\in D,\\ \zeta_{\bar z}=0, & 若\quad z\in E-\overline{D},\end{cases}\tag{2}$$

而在 $z=\infty$ 处 $\zeta(z)=z+O(1/|z|)$；

(Ⅱ) $\zeta=\zeta(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$；

(Ⅲ) $\zeta=\zeta(z)$ 的逆函数 $z=z(\zeta)\in C_\alpha(\overline{G})$，这里 $G=\zeta(D)$；

(Ⅳ) $\zeta_z(z)|_{z\in\overline{D}}\neq 0$.

然后又证明了：

定理 3 在定理 1 的条件下，如果函数 $f(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$，则二维奇异积分方程

$$\omega(z)+\frac{q(z)}{\pi}\iint_D\frac{\omega(t)}{(t-z)^2}\mathrm{d}\sigma_z=f(z)\tag{3}$$

有唯一解

$$\omega(z)=\Big(-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)_z}\mathrm{d}\sigma_z\Big)_z\in C_\alpha(\overline{D}),\tag{4}$$

式中的 $\zeta(z)$ 是定理 2 中的整体同胚.

Beltrami 方程(1)在系数 $q(z)$ 为退化即在 D 的边界 Γ 上成立 $|q(z)|=1$ 的情形虽然已有不少的文章讨论，但将有界域上的解扩充为整体同胚的还很少见[2]. 而积分方程(3)尽管在 $|q(z)|\leqslant q_0<1$ 的情形早已解决[3]，$|q(z)|=1$ 的情形亦已被解决[4]，但在条件 $|q(z)|\leqslant 1$ 并且等号可以在边界上取到的情形尚未见有人讨论.

下面是定理的证明

定理 2 的证明 (Ⅰ)由定理 1 已经知道存在有从 $\overline{D}$ 到单位圆盘 $\overline{\triangle}$ 的同胚映射 $w=w(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$ 使之在 D 上满足方程(1)，如果 $\beta=\beta(w)$ 是从 $\triangle$ 到 D 的共形映射，则 $\beta=g(w(z))$ 是一个从 $\overline{D}$ 到 $\overline{D}$ 的同胚映射并且在 D 上满足 $\beta_{\bar z}-q(z)\beta_z=0$. 由文献[5]知道存在一个函数 $\varphi^+(\beta)$ 在 D 上解析，而有另一个函数 $\varphi^-(z)$ 在 $E-\overline{D}$ 中解析，在 $z=\infty$ 处有 $\varphi^-(z)=O(1/|z|)$，函数 $\varphi^+(\beta)$ 与 $\varphi^-(z)$ 在 Γ 上是 Hölder 连续的并且满足 Haseman 边值问题

$$\varphi^+(\beta(t))|_{t\in\Gamma}=\varphi^-(t)+t+c,\tag{5}$$

为了讨论解的性质，定义

$$\varphi^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\alpha(\beta^{-1}(\tau))}{\tau-z}\mathrm{d}\tau 与 \varphi^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\alpha(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,$$

这里 $\alpha(\tau)$ 是 Fredholm 型积分方程

$$\alpha(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Big(\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)-\beta(t)}-\frac{1}{\tau-t}\Big)\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau=t+c$$

的解，它的可解性已在文献[5]中解决. 若令 $\alpha_1(t)$ 与 $\alpha_2(t)$ 满足

$$\alpha_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Big(\frac{\beta'(\tau)}{\beta(\tau)-\beta(t)}-\frac{1}{\tau-t}\Big)\alpha_1(\tau)\mathrm{d}\tau=1 与 \alpha_2(t)=\int_\gamma\alpha_1(\tau)\mathrm{d}\tau+c_1,$$

这里 γ 是 Γ 上的子弧，其起点 t_0 与终点 $t\in\Gamma$，选择常数 c_1 使得 $\int_\Gamma\alpha_2(t)\mathrm{d}t=0$，则容易证明 $\alpha_2(t)$ 是 Γ 上的单值连续可导函数且 $\alpha(t)=\alpha_2(t)+c_2$，因为 $\beta(t)\in C_\alpha^1(\Gamma)$. 所以 $\alpha_1(t)\in C_\alpha(\Gamma)$ 而 $\alpha(t)\in C_\alpha^1(\Gamma)$，因此 $\varphi^+(\beta)\in C_\alpha^1(\overline{D})$ 而 $\varphi^-(z)\in C_\alpha^1(E-D)$. 设

$$\zeta(z)=\begin{cases}\varphi^{+}(\beta(z)), & 当 \quad z\in D,\\ \varphi^{-}(z)+z+c, & 当 \quad z\in E-D,\end{cases}$$

则 $\zeta=\zeta(z)$ 将满足式(2),在复平面 E 上连续,在 $z=\infty$ 处有 $\zeta(z)=z+O(1/|z|)$. 现在再证明 $\zeta=\zeta(z)$ 是从 z 平面到 ζ 平面的整体同胚. 记 $\gamma=\zeta(\Gamma)$, $\Gamma_R=\{z:|z|=R\}$,这里 R 是充分大的正数. 设 B 是为 γ 所界定的一个开子集,而 K 是 B 中任意一个连通子集,那么 K 必为一个单连通域. 任取 $\zeta_0\in K$,则 $\zeta_0-\varphi^{+}(\beta)$ 在 D 中的零点数与 $\zeta_0-(\varphi^{-}(z)+z+c)$ 在域 $\{z:|z|<R\}-\overline{D}$ 中的零点数分别为

$$n=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\arg(\zeta-\zeta_0)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma}\arg(\varphi^{+}(\beta(t))-\zeta_0),$$

$$1-n=\frac{1}{2\pi}(\Delta_{\Gamma_R}\arg(\varphi^{-}(z)+z+c-\zeta_0)-\Delta_{\Gamma}\arg(\varphi^{-}(t)+t+c-\zeta_0)),$$

因为 $\varphi^{+}(\beta)$ 与 $\varphi^{-}(z)$ 分别在域 D, $E-\overline{D}$ 中解析,所以 $n\geqslant 0$ 且 $1-n\geqslant 0$,由此证出 $\zeta=\zeta(z)$ 是从 z 平面到 ζ 平面的整体同胚并且满足条件(2).

(Ⅱ) 由定理 1 已经知道 $w=w(z)\in C_{\alpha}^{1}(\overline{D})$, $\beta=\beta(w)$ 是从 $\triangle$ 到 D (其边界 $\Gamma\in C_{\alpha}^{1}$)的共形映射,而 $\zeta=\varphi^{+}(\beta)$ 是从 D 到 $\varphi^{+}(D)$ 的共形映射并且具有边界值 $\varphi^{+}(t)\in C_{\alpha}^{1}(\Gamma)$,所以 $\zeta=\zeta(z)=\varphi^{+}(\beta(w(z)))\in C_{\alpha}^{1}(\overline{D})$.

(Ⅲ) 因为 $z=z(w)\in C_{\alpha}(\overline{\triangle})$,所以 $z=z(\zeta)=z(\beta^{-1}(\varphi^{+}(\zeta)^{-1}))\in C_{\alpha}(\overline{G})$.

(Ⅳ) 首先证明将 $\overline{D}$ 同胚映射为闭单位圆盘 $\overline{\triangle}$ 且满足方程(1)的映射 $w=w(z)$ 成立 $w_z(z)|_{z\in\overline{D}}\neq 0$. 只需对于任意 $t_0\in\Gamma$ 证明 $w_z(t_0)\neq 0$. 先设 $\omega=\omega(z)$ 将 D 共形映射为单位圆盘 $\triangle$,其逆函数记为 $z=z(\omega)$,因为 $\Gamma\in C_{\alpha}^{1}$,由文献[3]第一章的定理 1.8 有 $\omega(z)\in C_{\alpha}^{1}(\overline{D})$ 而 $z(\omega)\in C_{\alpha}^{1}(\overline{\triangle})$,注意 $\omega'(z)=1/z'(\omega)$,因此必有 $\omega'(z)|_{z\in\overline{D}}\neq 0$. 任意 $t_0\in\Gamma$,记 $\omega_0=\omega(t_0)$,再记 $\theta_0=\arg\omega_0$, $\sigma_{\rho}=\{\omega=re^{\theta}:\rho<r<1,\theta_0-\rho<\theta<\theta_0+\rho\}$,令 $\zeta=\zeta(\omega)=\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$,它将域 σ_{ρ} 共形映射为文献[1]的引理 1 中的矩形域 R_{ρ},再由文献[1]所证明的,存在映射

$$\eta=\psi(\xi)=\overline{\int_{\gamma}e^{A\xi-H(\xi)}\mathrm{d}\xi}+\int_{\gamma}e^{-A\xi-H(\xi)}\mathrm{d}\xi,$$

它将域 R_{ρ} 拟共形同胚映射为 $G_{\rho}=\psi(R_{\rho})$ 使得函数 $w=g(\eta)=w(\psi^{-1}(\eta))$ 为定义在 G_{ρ} 上的满足 $g_{\bar{\eta}}-Q_2(\eta)g_{\eta}=0$ 且将 G_{ρ} 映射为单位圆盘 $\triangle$ 中某一子域的拟共形映射,而其中的复伸张 $Q_2(\eta)\in C_{\alpha}(\overline{G}_{\rho})$ 并且在 G_{ρ} 上满足一致椭圆型条件

$$|Q_2(\eta)|\leqslant Q_0<1, \tag{7}$$

因为 $w=g(\eta)$ 为在 G_{ρ} 满足(7)的拟共形映射. 因而 $g_{\eta}(\eta)|_{\eta\in\overline{G}_{\rho}}\neq 0$. 因此

$$|w_z(z)|=|(g_{\eta}\eta_{\xi}+g_{\bar{\eta}}\bar{\eta}_{\xi})\xi'(\omega)\omega'(z)|=\left|\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}g_{\eta}\eta_{\xi}(1+Q_2(\eta)\frac{\bar{\eta}_{\xi}}{\eta_{\xi}}\right|$$

$$\geqslant\left|\frac{\omega'(z)g_{\eta}\eta_{\xi}}{\omega(z)}\right|(1-|Q_2(\eta)|)>0,$$

上式用到 $|Q_2(\eta)|\leqslant Q_0<1$ 及由(6)式得到的 $\eta_{\xi}=e^{-A\xi-H(\xi)}\neq 0$.

因为 $\zeta(z)=\varphi^{+}(\beta(w(z)))=f(w(z))$,其中 $f(w)=\varphi^{+}(\beta(w))$ 为 $\triangle$ 到域 $G=\zeta(D)$ 的共形映射. 因 D 的边界 $\Gamma\in C_{\alpha}^{1}$ 且 $\zeta(z)\in C_{\alpha}^{1}(\overline{D})$,与前面证明 $\omega(z)|_{z\in\overline{D}}\neq 0$ 完全类似可以证

明 $f'(w)|_{w\in\overline{\triangle}}\neq 0$,证毕.

推论 存在 $m_1,m_2>0$ 使得 $m_1\leqslant|\zeta_z(z)||_{z\in\overline{D}}\leqslant m_2$.

注记 $z=z(\zeta)$,在域 $G=\zeta(D)$,中满足 $z_{\bar\zeta}-Q(\zeta)z_\zeta=0$,并且对于 $\lambda<2$ 由文献 [1] 定理 3 的注记可以得出

$$\iint_G(1-|Q(\zeta)|^2)^{-\lambda}\mathrm{d}\sigma_\zeta=\iint_D\frac{|\zeta_z(z)|^{2(1-\lambda)}}{(1-|q(z)|^2)^{\lambda-1}}\mathrm{d}\sigma_z<+\infty,\tag{8}$$

这个不等式将在证明定理 3 时用到.

引理 4 如果 $\alpha<2,\beta<2$ 与 $\alpha+\beta>2$,那么存在 $M>0$ 使得

$$\iint_D|t-z_1|^{-\alpha}|t-z_2|^{-\beta}\mathrm{d}\sigma_z\leqslant M|z_1-z_2|^{2-\alpha-\beta},\tag{9}$$

此引理的证明请参阅维库阿的著作[3]中的定理 1.19 的证明过程.

定理 3 的证明 首先证明

$$\iint_D\frac{\zeta_z(z)f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}\mathrm{d}\sigma_z\in C_\alpha(\overline{D})\text{ 与}\iint_D\frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}\mathrm{d}\sigma_z\in C_\alpha^1(\overline{D}),$$

因为

$$\iint_D\frac{\zeta_z(z_2)f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}\mathrm{d}\sigma_z-\iint_D\frac{\zeta_z(z_1)f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_1)}\mathrm{d}\sigma_z$$

$$=\iint_D\frac{(\zeta_z(z_2)-\zeta_z(z_1))f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}\mathrm{d}\sigma_z+\iint_D\frac{(\zeta_z(z_2)-\zeta_z(z_1))f_z(t)(\zeta_z(z_1)-\zeta_z(t))}{(\zeta(t)-\zeta(z_2))(\zeta(t)-\zeta(z_1))}\mathrm{d}\sigma_z+$$

$$\iint_D\zeta_z(t)\left(\frac{f_z(t)-f_z(z_1)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}-\frac{f_z(t)-f_z(z_1)}{\zeta(t)-\zeta(z_1)}\right)\mathrm{d}\sigma_z+$$

$$f_z(z_1)\iint_D\left(\frac{\zeta_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}-\frac{\zeta_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_1)}\right)\mathrm{d}\sigma_z,$$

而

$$\left|\iint_D\frac{(\zeta_z(z_2)-\zeta_z(z_1))f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}\mathrm{d}\sigma_z\right|\leqslant C_1\iint_D\frac{|z_2-z_1|^\alpha}{|\zeta(t)-\zeta(z_2)|}\mathrm{d}\sigma_z$$

$$\leqslant C_2|z_2-z_1|^\alpha\iint_G(1-|Q(\tau)|^2)^{-1}|\tau-\zeta_2|^{-1}\mathrm{d}\sigma_\zeta$$

$$\leqslant C_2|z_2-z_1|^\alpha\left(\iint_G(1-|Q(\tau)|^2)^{-\lambda}\mathrm{d}\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\iint_G|\tau-\zeta_2|^{-\mu}\mathrm{d}\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant M_1|z_2-z_1|^{\alpha+\frac{2}{\mu}-1},$$

这里 $0<\lambda<2,\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=1$,而且

$$\left|\iint_D\frac{(\zeta(z_2)-\zeta(z_1))f_z(t)(\zeta_z(z_1)-\zeta_z(t))}{(\zeta(t)-\zeta(z_2))(\zeta(t)-\zeta(z_1))}\mathrm{d}\sigma_z\right|$$

$$\leqslant C_1|z_2-z_1|\iint_G(1-|Q(\tau)|^2)^{-1}|\tau-\zeta_1|^{\alpha-1}|\tau-\zeta_2|^{-1}\mathrm{d}\sigma_\zeta$$

$$\leqslant C_1|z_2-z_1|\left(\iint_G(1-|Q(\tau)|^2)^{-\lambda}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left(\iint_G|\tau-\zeta_1|^{\mu(\alpha-1)}|\tau-\zeta_2|^{-\mu}d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant M_2|z_2-z_1|^{\alpha+\frac{2}{\mu}-1},$$

因为 $f(z)\in C_\alpha^1(\overline{D})$，类似可得

$$\left|\iint_D\zeta_z(t)\left(\frac{f_z(t)-f_z(z_1)}{\zeta(t)-\zeta(z_2)}-\frac{f_z(t)-f_z(z_1)}{\zeta(t)-\zeta(z_1)}\right)d\sigma_z\right|\leqslant M_3|z_2-z_1|^{\alpha+\frac{2}{\mu}-1},$$

并且还有

$$\left|\frac{f_z(z_1)}{2\pi i}\iint_D\left(\frac{\zeta_z(t)}{\zeta(t)-\zeta_2}-\frac{\zeta_z(t)}{\zeta(t)-\zeta_1}\right)d\sigma_z\right|=\left|\frac{f_z(z_1)}{2\pi i}\int_{\Gamma\cup\gamma}\ln\frac{\zeta(t)-\zeta(z_2)}{\zeta(t)-\zeta(z_1)}d\bar t\right|\leqslant M_4|z_2-z_1|,$$

这里 γ 是一条简单弧，它的起点为 z_1，终点为 $z_2\in\overline{D}$. 如果 μ 充分接近于 2，则 $\alpha+\dfrac{2}{\mu}-1>0$，所以由上面的不等式证明了

$$\iint_D\frac{\zeta_z(z)f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\sigma_z\in C_\alpha(\overline{D}).$$

如果 l 是一条起点在 $z\in D$，终点在 Γ 上的简单弧，注意 $(\int_l f(t)d\bar t)_z\in C_\alpha(\overline{D})$ 而

$$\frac{\zeta_z(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\bar t=\frac{\zeta_z(z)}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(z(\tau))\bar z'(\tau)}{\tau-\zeta}d\bar\tau\in C_\alpha(\overline{G})$$

因此

$$\left(\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\sigma_z\right)_z=\frac{\zeta_z(z)}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\bar t+\left(\int_l f(t)d\bar t\right)_z+$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\zeta_z(z)f_z(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\sigma_z\in C_\alpha(\overline{D}).$$

现在将证明积分方程(3)有唯一解(4). 设 $\omega(z)$ 由(4)式定义，令

$$w(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}d\sigma_z\in C_\alpha^1(\overline{D}),$$

则 $\omega(z)=w_{\bar z}\in C_\alpha(\overline{D})$ 并且

$$w(z)=g(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\omega(t)}{t-z}d\sigma_z,$$

这里 $g(z)$ 是在域 D 上为解析的. 因为 $w(z)$ 与 $\dfrac{1}{\pi}\iint_D\dfrac{\omega(t)}{t-z}d\sigma_z$ 都在 $E-\overline{D}$ 解析，在复平面 E 上连续并且在 $z=\infty$ 处取值为零，所以有 $g(z)\equiv0$ 而

$$w(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\omega(t)}{t-z}d\sigma_z. \tag{10}$$

由 $w(z(\zeta))=-\dfrac{1}{\pi}\iint_G\dfrac{\zeta_z(z(\tau))f(z(\tau))}{(|\zeta_z(z(\tau))|^2-|\zeta_{\bar z}(z(\tau))|^2)(\tau-\zeta)}d\sigma_\zeta$，得 $w_{\bar\zeta}=\zeta_z(z)f(z)/(|\zeta_z|^2-|\zeta_{\bar z}|^2)$ 而

$$\omega(z)+\frac{q(z)}{\pi}\iint_D\frac{\omega(t)}{(t-z)^2}d\sigma_z=w_{\bar z}-q(z)w_z=w_{\bar\zeta}(\bar\xi_{\bar z}-q(z)\bar\xi_z)+w_\zeta(\zeta_{\bar z}-q(z)\zeta_z)$$

$$= w_{\bar\zeta}\frac{|\zeta_z|^2 - |\zeta_{\bar z}|^2}{\zeta_z} = f(z),$$

所以 $\omega(z)\in C_\alpha(\overline{D})$ 并且满足积分方程(3)，又若 $\omega(z)\in C_\alpha(\overline{D})$ 且满足积分方程(3)，$w(z)$ 由(10)式定义，则

$$w_z = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\omega(t)}{(t-z)^2}\mathrm{d}\sigma_z,$$

因为

$$w_{\bar\zeta} = w_{\bar z}\bar z_{\bar\zeta} + w_z z_{\bar\zeta} = \frac{\zeta_z(z(\zeta))(w_{\bar z}(z(\zeta)) - q(z)w_z(z(\zeta)))}{|\zeta_z(z(\zeta))|^2 - |\zeta_{\bar z}(z(\zeta))|^2} = \frac{\zeta_z(z(\zeta))f(z(\zeta))}{|\zeta_z(z(\zeta))|^2 - |\zeta_{\bar z}(z(\zeta))|^2},$$

所以

$$w(z(\zeta)) = g_1(\zeta) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\zeta_z(z(\tau))f(z(\tau))}{(|\zeta_z(z(\tau))|^2 - |\zeta_{\bar z}(z(\zeta))|^2)(\tau-\zeta)}\mathrm{d}\sigma_\zeta,$$

这里 $g_1(\zeta)$ 在 G 解析. 但是由 $w(z(\zeta))$ 与 $-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z(\zeta))}\mathrm{d}\sigma_z$ 两者均在 $E-\overline{G}$ 中解析，在 E 上连续并且在 $\zeta=\infty$ 处取值为零，因此容易证明 $g_1(\zeta)\equiv 0$. 由此及 $\omega(z)=w_{\bar z}$ 证明等式(4)成立.

注 定理 3 在条件 $\operatorname*{ess}_{z\in D}|q(z)|<1$ 下仍然成立.

例 设 D 是单位圆盘 $\triangle$，$q(z)=z$，$f(z)=z(\bar z-\frac{\bar z^2}{2})$，现由公式(4)求积分方程(3)的解. 利用文献[6]，容易求出满足定理 2 的从 z 平面到 ζ 平面的整体同胚是

$$\zeta(z) = \begin{cases} ze^{\bar z}, & \text{当} \quad z\in\triangle, \\ ze^{\frac{1}{z}}, & \text{当} \quad z\in E-\triangle, \end{cases}$$

它映射单位圆周 Γ 为 ζ 平面上的闭曲线 γ. 设 G 是一个为 γ 所界的单连通域. 以 l 记从 z 到 $\frac{z}{|z|}$ 的直线段而以 L_R 记从 $\frac{z}{|z|}$ 到 $\frac{Rz}{|z|}(R>1)$ 的直线段，这里 $z\in\triangle-\{0\}$. 设 $\gamma_1 = l\cup\Gamma\cup l^-$，$\Gamma_R=\{z:|z|=R\}$，$\gamma_2=\Gamma\cup L_R\cup\Gamma_R^-\cup L_R^-$，因为 $\zeta(z)$ 是一个从 z 平面到 ζ 平面的同胚映射，故对任意 $z\in\triangle$ 有 $ze^{\bar z}\in G$. 因此成立：

$$-\frac{1}{\pi}\iint_\triangle \frac{\zeta_z(t)f(t)}{\zeta(t)-\zeta(z)}\mathrm{d}\sigma_z = -\frac{ze^{\bar z}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\tau-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{\tau}}\ln(\tau e^{\frac{1}{\tau}} - ze^{\bar z})}{\tau^4}\mathrm{d}\tau - ze^{\bar z}\int_l(\bar\tau - \frac{\bar\tau^2}{2})e^{-\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau$$

$$= -\frac{ze^{\bar z}}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{(\tau-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{\tau}}\ln(\tau e^{\frac{1}{\tau}} - ze^{\bar z})}{\tau^4}\mathrm{d}\tau - \frac{ze^{\bar z}}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{(\tau-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{\tau}}\ln(\tau e^{\frac{1}{\tau}} - ze^{\bar z})}{\tau^4}\mathrm{d}\tau +$$

$$ze^{\bar z}\int_{L_R}\frac{(\tau-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{\tau}}}{\tau^4}\mathrm{d}\tau - ze^{\bar z}\int_l(\bar\tau-\frac{\bar\tau^2}{2})e^{-\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau$$

$$= 0 + ze^{\bar z}\int_{\frac{z}{|z|}}^{\infty}\frac{(\tau-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{\tau}}}{\tau^4}\mathrm{d}\tau - ze^{\bar z}\int_z^{\frac{z}{|z|}}(\bar\tau-\frac{\bar\tau^2}{2})e^{-\bar\tau}\mathrm{d}\bar\tau = \frac{1}{2}z\bar z^2$$

由(4)式得到 $\omega(z)=|z|^2$，它满足积分方程(3).

参考文献：

[1] 黄新民. 关于退化拟共形映射的分类与边界对应 [J]，广西科学，1996，3(2)：5.

[2] CIMA J A and DERRICK W R. *Some Solutions of the Beltrami Equation with* $\|\mu\|_\infty=1$，*Several complex variables and complex geometry* [J]. Part 1(Santa Cruz,ca,1989),41—44,Proc. Sympos. Pure Math. ,52 Part 1,Amer. Math. Soc. ,Providence,RI,1991.

[3] 维库阿 N H. 广义解析函数 [M]. 中国科学院数学研究所偏微分方程组与北京大学数学力学系函数论教研组合译，人民教育出版社，1960，6.

[4] HUANG Xim-min. *On the Two Dimensional Singular Integral Equations*, *Differential and Integral Equations* [J]. Vol. 2, Num. 3, July 1989, 275—284.

[5] 利特温秋克 Г С. 带位移的奇异积分方程与边值问题 [M]. 赵桢等译，北京师范大学出版社，1982，8.

[6] CIMA J A and DERRICK W R. *Normal Solutions of the Beltrami Equation*, Ⅱ [J]. J. of Math. Anal. , and Applications, 1990, 151: 359—371.

The Degenerate Quasicomformal Global Homeomorphism and Two Dimensional Singular Integral Equations

HUANG Xin-min

(Dept. of Math. & Info. Sci. , Guangxi University, Nanning)

Abstract: Suppose that D is a simply connected region whose boundary $\Gamma\in C_a^1(0<a\leqslant 1)$, the complex function $q(z)\in C_a^1(\overline{D})$ and $|q(z)|\leqslant 1$, the strict form may only be hold for $z\in\Gamma$, and equality $q(z(t))\overline{z'(t)}/z'(t)+1|_{z\in\Gamma}=0$ may hold only at finite points. In this paper global homeomorphism solutions of a Beltrami equation with the complex dilation $q(z)$ satisfy above conditions and solutions of a kind of two dimensional singular integral equations with the coefficient $q(z)$ were obtained.

Key words: degenerate; quasicomformal mapping; global homeomorphism; two dimensional; singular integral equations.