第19卷第4期 数学研究与评论 Vol. 19 No. 4
1999年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1999

赋范线性空间中的最佳共逼近的一点注记*

倪仁兴
(绍兴文理学院数学系，浙江 312000)

摘　要：本文用例子表明最佳共逼近与最佳逼近间有着区别. 指出强共逼近的元未必是唯一的；凸集未必是共太阳集和强共 Kolmogorov 集；而在最佳逼近论中它们的相应回答均是肯定的.

关键词：最佳共逼近；强共逼近；共太阳集；强共 Kolmogorov 集.
分类号：AMS(1991) 41A65/CLC O174.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(1999)04-0778-03

设 X 是赋范线性空间. G 是 X 中非空子集. 对 $x\in X$, $g_0\in G$，若 $\forall g\in G$ 有 $\|g_0-g\|\leqslant\|x-g\|$，则称 g_0 是 G 对 x 的最佳共逼近[1]，其全体记为 $R_G(x)$，即

$$R_G(x)=\{g_0\in G;\ \|g_0-g\|\leqslant\|x-g\|\ (\forall g\in G)\}.$$

若 $\forall x\in X$ 有 $R_G(x)\neq\varnothing$，则称 G 是最佳共逼近的存在性集[2].

受 C. Franchetti 和 M. Furi 的文[3]启发，自 1979 年 P. L. Papini 和 I. Singer 在[1]中提出赋范线性空间中的最佳共逼近的概念以来，已有些人进行了研究[1-7]，但往往是先考察最佳共逼近与最佳逼近间的联系，后用最佳逼近论中已有的结论导出最佳共逼近论中相应命题. 本文用例子表明最佳共逼近与最佳逼近间有着区别，并不是所有结论都能类推. 指出强共逼近的元未必是唯一的；凸集未必是共太阳集和强共 Kolmogorov 集，而在最佳逼近论中它们的相应回答均是肯定的，即凸集是太阳集和强 Kolmogorov 集且强逼近元必唯一.

定义 1[4]　对 $x\in X/G$, $g_0\in R_G(x)$ 必有 $g_0\in R_G(g_0+t(x-g_0))$ $(\forall t\geqslant0)$，则称 G 是共太阳集.

定义 2[5]　若有常数 $C=C(x)>0$ 使得

$$C\|x-g_0\|+\|g_0-g\|\leqslant\|x-g\|\ (\forall g\in G),$$

则称 g_0 是 G 对 $x(\in X)$ 的强共逼近，其全体记为 $\mathring{R}_G(x)$，即 $\mathring{R}\ (x)=\{g_0\in G; g_0$ 是 G 对 x 的强共逼近$\}$.

定义 3[6]　对 $x\in X$ 和 $g_0\in\mathring{R}_G(x)$ 有正常数 r 使对任何 $g\in G$，

$$\tau(g_0-g;x-g_0)\geqslant r\|x-g_0\|,$$

则称 G 是强共 Kolmogorov 集. 其中 $\tau(x,y)\triangleq\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}\ (x,y\in X)$.

---

* **收稿日期**：1996-06-10
作者简介：倪仁兴(1964-)，男，浙江绍兴人，硕士，绍兴文理学院副教授.

例 1 令 $X=C[0,1]$(即$[0,1]$上的连续函数类,其中的元赋以通常的上确界范数),$x:x(t)=t^2$;$y:y(t)=t$,$G=\{ky;-1\leqslant k\leqslant \frac{3}{2}\}$,则可得

(A) $ay\in R_G(x)\Leftrightarrow a\in[\frac{15}{16},1]$.

事实上,若 $ay\in R_G(x)$即对$\forall\ k\in[-1,\frac{3}{2}]$有

$$\|ay-ky\|\leqslant\|x-ky\|,$$

令 $k=0$ 得 $a\in[-1,1]$,而当 $a\in[-1,\frac{15}{16})$时,取 $k=\frac{3}{2}$有

$$\|ay-ky\|=\frac{3}{2}-a>\frac{k^2}{4}=\frac{9}{16}=\|x-ky\|.$$

这样若 $ay\in R_G(x)$有 $a\in[\frac{15}{16},1]$. 反之,若 $a\in[\frac{15}{16},1]$,则有

$$\|ay-ky\|=\begin{cases}a-k, & \text{当 } k\in[-1,2(\sqrt{2}-1)]\text{时},\\ (a-k)\operatorname{sign}(a-k), & \text{当 } k\in[2(\sqrt{2}-1),\frac{3}{2}]\text{时};\end{cases}$$

$$\|x-ky\|=\begin{cases}1-k, & \text{当 } k\in[-1,2(\sqrt{2}-1)]\text{时},\\ \frac{k^2}{4}, & \text{当 } k\in[2(\sqrt{2}-1),\frac{3}{2}]\text{时}.\end{cases}$$

由此可得 $\|ay-ky\|\leqslant\|x-ky\|$ 即 $ay\in R_G(x)$.

(B) $ay\in\mathring{R}_G(x)\Leftrightarrow a\in(\frac{15}{16},1)$.

事实上,若 $ay\in\mathring{R}_G(x)$,注意到$\forall\ r>0$ 有

$$r\|y-x\|+\|\frac{1}{2}y-y\|>\|x-\frac{1}{2}y\|,$$

$$r\|\frac{15}{16}y-x\|+\|\frac{3}{2}y-\frac{15}{16}y\|>\|x-\frac{3}{2}y\|,$$

即$\frac{15}{16}y\notin\mathring{R}_G(x)$和 $y\notin\mathring{R}_G(x)$,结合(A)得 $a\in(\frac{15}{16},1)$. 反之,若 $a\in(\frac{15}{16},1)$,则有常数 r 满足

$$0<r<\min(\frac{4(1-a)}{a^2},\frac{16a-15}{4a^2}),$$

使得$\forall\ k\in[-1,\frac{3}{2}]$,$r\|ay-x\|+\|ay-ky\|\leqslant\|x-ky\|$ 成立即 $ay\in\mathring{R}_G(x)$.

(C) $\tau(ay-ky,x-ay)=(1-a)\operatorname{sign}(a-k)$.

事实上,由[8]得$\forall\ f,g\in C[0,1]$有

$$\tau(f,g)=\sup_{t\in E_f}[(\operatorname{sign}f(t))\cdot g(t)],$$

其中 $E_f=\{t\in[0,1];|f(t)|=\|f\|\}$,这样

$$\begin{aligned}E_{ay-ky}&=\{t\in[0,1];|(ay-ky)(t)|=\|ay-ky\|\}\\&=\{t\in[0,1];|(a-k)(t)|=|a-k|\}=\{1\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(ay-ky,x-ay)&=\sup_{t\in E_{ay-ky}}[(\operatorname{sign}(ay-ky)(t))\cdot(x-ay)(t)]\\&=(1-a)\operatorname{sign}(a-k).\end{aligned}$$

因此

① 由(B)知强共逼近的元未必唯一;

② 凸集未必是共太阳集和强共 Kolmogorov 集. 但可以证明仿射集和线性子空间均是共太阳集和强共 Kolmogorov 集;

事实上,例 1 中的 G 显然为凸集,由(C)若 $a<1$ 对某些 k 可使 $\tau(ay-ky, x-ay)<0$,再结合(A),(B)和[6,定理 1]得 G 不是共太阳集和强共 Kolmogorov 集.

③ 由(A)和(B)知若 $g_0\in R_G(x)$未必有 $g_0\in \mathring{R}_G(x)$. 但若 $g_0\in \mathring{R}_G(x)$恒有 $g_0\in R_G(x)$.

例 2 [2]中已证得:严格凸空间中的最佳共逼近存在性集必是凸集;有限维赋范空间中的最佳共逼近存在性集是共太阳集。但在最佳逼近论中,相应的结论均未必有,如令 X 为严格凸有限维空间,G_0 为 X 中闭集且不是 Chebyshev 集,则 G_0 非凸;再取 $X=R'$,$G_0=[-4,-3]U[3,4]$,则 G_0 是存在性集但不为太阳集。

参考文献:

[1] PAPINI P L and SINGER I. *Best coapproximation in normed linear spaces* [J]. Mh. Math., 1979, **88**: 27—44.

[2] WESTPHAL U. *Cosuns in $l^p(n)$*, $1\leqslant p<+\infty$ [J]. J.A.T., 1988, **54**: 287—305.

[3] FRANCHETTI C and FURI M. *Some characteristic properties of real Hilbert spaces* [J]. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1972, **17**: 1045—1048.

[4] HETZELT L. *On sun and cosuns in finite dimensional normed real vector spaces* [J]. Acta. Math. Hung., 1985, **45**: 53—68.

[5] SONG Wen-hua. *The coapproximation in linear spaces* [J]. A.T.A., 1993, **9**(4): 55—65.

[6] 倪仁兴. 赋范线性空间中的最佳共逼近 [J]. 绍兴文理学院学报, 1995, **15**(5): 40—45.

[7] 宋文华. 关于余逼近的一点注记 [J]. 数学研究与评论, 1994, **14**(4): 547—551.

[8] SATO K. *On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices* [J]. J. Math. Soc. Japan, 1968, **20**(3): 423—436.

A Remark on Best Coapproximation in Normal Linear Spaces

NI Ren-xing

(Dept. of Math., Shaoxing College of Arts and Sciences, Zhejiang 312000)

Abstract: In this paper, we give examples which illustrate the difference between the best coapproximation and the best approximation, to point out that strongly best coapproximation, element may not be uniqueness and convex sets may not be cosuns and strongly co-Kolmogorov sets. But respect answers are in the affirmative in the theory of best approximation.

Key words: best coapproximation; strongly coapproximation element; cosun sets; strongly co-Kolmogorov sets.