第20卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 20 No. 1
2000年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 2000

关于伪微分方程的几点注记*

金 坚 明
(西北师范大学计算中心,兰州 730070)

摘 要:本文通过对文[1]的研究,在最小支集样条小波变换及 $\eta_k^j A u^j=\eta_k^j f$ 方程的探讨中,得到一些新的结论.

关键词:n 维环面;周期函数;小波变换;伪微分算子;伪微分算子方程.
分类号:AMS(1991) 35S50/CLC O175.3
文献标识码:A　　**文章编号**:1000-341X(2000)01-0071-06

1 关于周期伪微分算子的几条定义

定义 1 $T^n := R^n/Z^n$,表示 n 维环面.

定义 2 $\Psi^r(T^n)(\Phi^\mu(T^n))$是由伪微分算子

$$A=\sigma(x,D)+K \text{ 组成的类,} \tag{1}$$

其中 $\sigma\in \mathscr{S}^r(T^n)(\bar{Z}^\mu(T^n))$, $K\in C^\infty(T^n\times T^n)$是一光滑算子, $ku(x):=\int_{T^n}k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$,对于 $r\in R$, $S^r(T^n)$表示这样的一个集合,是由所有 $\sigma\in C^\infty(T^n\times Z^n)$ 组成,且满足

$$|\partial x^\beta \triangle^\alpha(\xi)\sigma(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{r-|\alpha|}, x\in T^n, \xi\in Z^n, \tag{2}$$

函数 σ 称为在 T^n 上的 r 阶的全局象征.

定义 3 周期函数

$$f(x+K)=f(x), K\in Z^n; \tag{3}$$

周期算子

$$[f](x):=\sum_{k\in Z^n}f(X+k) \tag{4}$$

映 $L^2(R^n)$到 $L^2(T^n)$.

定义 4 全局伪微分算子为

$$\sigma(x,D)u(x)=\sum_{\xi\in Z^n}e^{2\pi i(\xi,x)}\sigma(x,\xi)u^\wedge(\xi), u\in C^\infty(T^n); \tag{5}$$

* **收稿日期**:1996-08-27
作者简介:金坚明(1943-),男,浙江省萧山市人,西北师范大学教授.

全局伪微分算子方程为

$$Au = f, \tag{6}$$

其中 $A \in \Psi^r(T^n)$，$u \in H^s(T^n)$，$f \in H^{s-r}(T^n)$.

定义 5 常系数伪微分算子为：

$$\sigma(D)u(x) = \sum_{\xi \in Z^n} e^{2\pi i(\xi,x)} \sigma(\xi) u^\wedge(\xi), \tag{7}$$

其中 $\sigma \in C^\infty(R^n \backslash \{0\})$，$\sigma(0)=1$，$u \in C^\infty(T^n)$；常系数伪微分算子方程为

$$\sigma(D)u = f, \tag{8}$$

其中 $u \in H^s(T^n)$，$f \in H^{s-r}(T^n)$.

定义 6 对于 $S \in R$，定义 Sobolev 空间 $H^s(T^n)$ 为

$$H^s(T^n) = \{u \in D'(T^n) : D^s u \in L^2(T^n)\}, \tag{9}$$

范数是

$$\| u \|_s = \left(\sum_{\xi \in Z^n} \langle \xi \rangle^{2s} |u^\wedge(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$\langle \xi \rangle = \begin{cases} |\xi|, \xi \neq 0, \\ 1, \ \xi = 0, \end{cases} \tag{11}$$

内积是

$$(u, v) = \left(\sum_{\xi \in Z^n} \langle \xi \rangle^{2s} u^\wedge(\xi) \bar{v}^\wedge(\xi) \right). \tag{12}$$

定义 7 对于 $f \in L^1(T^n)$ 定义 Fourier 变换为

$$f^\wedge(\xi) = \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i(\xi,x)} \mathrm{d}x, \xi \in Z^n, \tag{13}$$

$$f(x) = \sum_{\xi \in Z^n} f^\wedge(\xi) e^{2\pi i(\xi,x)}, x \in T^n. \tag{14}$$

定义 8

$$\eta \in H^{-s'}(\mathrm{r}), \tag{15}$$

其中 $s' > 0$，满足 $AV^j \subset H^{s'}(T^n)$，$\mathrm{r} \subset R^n$ 是一些参数域，对于任一 $g \in H^{s'}(R^n)$ 有

$$\eta_k^j(g) := 2^{-nj/2} \eta(g(2^{-j}(\cdot + k))), \tag{16}$$

$$x^j := \mathrm{span}\{\eta_k^j : k \in Z^{n,j}\},$$

其中

$$V^j := \mathrm{span}\{\varphi_k^j : k \in Z^{n,j}\}, \tag{17}$$

$$Z^{n,j} = Z^n / (2^j Z^n), \tag{18}$$

$$\varphi_k^j := 2^{jn/2}[\varphi(2^j \cdot - k)], k \in Z^n, x \in T^n. \tag{19}$$

2 最小支集样条小波变换中的误差分析

设 V^0 是三次样条函数空间，$\{\varphi_3(x-P)\}_{P\in Z^n}$，$x\in T^n$ 是其三次样条基函数，$V^j=\{2^{nj/2}\varphi_3(2^jx-P)\}_{P\in Z^n}$，$\{Vj\}$ 是 $L^2(T^n)$ 上的一个（二进）多尺度分析，$u\in L^2(T^n)$，令 P_j 表示在 V^j 上的正交投影算子，所以有

$$P_ju=\sum_{P\in Z^n}h_P2^{nj/2}\varphi_3(2^jx-P). \tag{20}$$

下面分两种情况讨论

(1) 当 $\sigma(x,D)$ 为常系数伪微分算子时有

$$\begin{aligned}A(P_ju(x))&=A\sum_{P\in Z^n}h_P2^{nj/2}\varphi_3(2^jx-P)\\&=\sum_{P\in Z^n}h_P2^{-nj/2}\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^\wedge(2^{-j}\xi)e^{i2\pi2^{-j}(x,\xi)}e^{-i2\pi2^{-j}(P,\xi)}.\end{aligned} \tag{21}$$

由文[3]知，研究最小支集三次样条小波变换存在的关键是分析其相应小波函数 $\psi_3(x)$，$x\in T^n$ 是否是容许的，由文[4]类同的分析知 $\psi_3(x)$ 是容许的，所以 $(W\psi_3f)(b,a)$ 是存在的，则有

$$\begin{aligned}(W\psi_3AP_ju)(x,a)&=\frac{1}{\sqrt{C_{\psi_3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{T^n}\bar{\psi}_3\left(\frac{t-x}{|a|}\right)(AP_3u(t))\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{C_{\psi_3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\sum_{P\in Z^n}\sum_{\xi\in Z^n}h_P\sigma(\xi)\varphi_3^\wedge(2^{-j}\xi)e^{-i2\pi2^{-j}(P,\xi)}\cdot\\&\quad 2^{-nj/2}\int_{T^n}\bar{\psi}_3\left(\frac{t-x}{\sqrt{|a|}}\right)e^{i2\pi2^{-j}(t,\xi)}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$(W\psi_3P_ju)(x,a)=\frac{1}{\sqrt{C_{\psi_3}}}\frac{1}{\sqrt{|a|}}\sum_{P\in Z^n}h_P2^{jn/2}\int_{T^n}\bar{\psi}_3\left(\frac{t-x}{|a|}\right)\varphi_3(2^jt-P)\mathrm{d}t,$$

其中 $C_{\psi_3}=\int_{T_0^n}\frac{|\psi_3^\wedge(\xi)|^2}{|\xi|}\mathrm{d}\xi$，$T_0^n:=T^n\backslash\{0\}$.

这样由文[2]和上面分析可得下面定理

定理 1 设 A 是常系数伪微分算子，$u\in L^2(T^n)$，P_j 表示在 V^j 上的正交投影算子，则有

$$\begin{aligned}&\|(W\psi_3AP_ju)(x,a)-(W\psi_3P_ju)(x,a)\|_{s-r}\leqslant\sum_{P\in Z^n}|h_P|\cdot\left\|\frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}}\right\|_{L^1(T^n)}\cdot\\&\left\|\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^\wedge(2^{-j}\xi)e^{i2\pi2^{-j}((x-P),\xi)}2^{-nj/2}-2^{nj/2}\varphi_3(2^jx-P)\right\|_{s-r}.\end{aligned} \tag{22}$$

在定理 1 条件下还可推出下面结论

命题 1 在定理 1 条件下，当 $n=1$，$s=r=2$ 时有

$$\|(W\psi_3AP_ju)(x,a)-(W\psi_3P_ju)(x,a)\|_0$$

$$\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} ((2^{j+1})^4 C + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x) \|_2) \sqrt{2}. \tag{23}$$

证明 在定理 1 条件下，当 $x \overline{\in} [0,4]$ 时，3 次(4 阶)多项式样条 $\varphi_3(x) \equiv 0$，所以当 $x \overline{\in} [P, P+4]$ 时，有 $\varphi_3(x-P) \equiv 0$. 令 $\sigma(\xi) = \langle \xi \rangle^2$，因为

$$\begin{cases} \varphi_3^\wedge(2^{-j}\xi) = \dfrac{\sin^4(2^{-j}\xi/2)}{(2^{-j}\xi/2)^4} e^{-i2^{(-j+1)}\xi}, \\ \psi_3^\wedge(0) = 1, \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\| (W\psi_3 AP_j u)(x,a) - (W\psi_3 P_j u)(x,a) \|_0 \\
&\leqslant \sum_{P\in Z} |h_p| \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} \Big\| \sum_{\xi \in Z} \langle \xi \rangle^2 \Big[\frac{\sin(2^{-j}\xi/2)}{(2^{-j}\xi/2)}\Big]^4 \cdot \\
&\quad e^{-i2^{(-j+1)}\xi} e^{i2\pi 2^{-j}(x-p)\xi} 2^{-j/2} \Big\|_0 + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x - P) \|_0) \\
&\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} \sum_{P\in Z} |h_p| (2^{-j/2} \sum_{\xi \in z\setminus\{0\}} (2^j \cdot 2)^4 (\frac{1}{\xi^2}) \cdot \\
&\quad \| e^{i2\pi 2^{-j}(x-P)\xi} \|_0 + 1 + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x - P) \|_2) \\
&\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} \sum_{P\in Z} |h_p| (2^{-j/2} \sum_{\xi \in z\setminus\{0\}} (2^{j+1})^4 (\frac{1}{\xi^2}) 2C_1 + 1 + 2^{j/2} \| \psi_3(2^j x - P) \|_2) \\
&\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} \sum_{P\in Z} |h_p| ((2^{j+1})^4 C + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x - P) \|_2) \cdot \\
&\quad \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} (2^{j+1})^4 C + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x) \|_2) \sum_{P\in Z} |h_p|.
\end{aligned}$$

又因为对于 3 次(即 4 阶)最小支集样条函数有[3] $h_p = 2^{-4+\frac{1}{2}} (\frac{4}{p})$ $(0 \leqslant P \leqslant 4$，其余为零)，所以有

$$\begin{aligned}
&\| (W\psi_3 AP_j u)(x,a) - (W\psi_3 P_j u)(x,a) \|_0 \\
&\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} (2^{j+1})^4 \cdot C + 2^{j/2} \| \varphi_3(2^j x) \|_2 \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

□

在命题 1 的条件中增加 $j=0$ 进一步有

$$\begin{aligned}
\| (W\psi_3 AP_0 u)(x,a) - (W\psi_3 P_0 u)(x,a) \|_0 &\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} (16C + \| \varphi_3(x) \|_2) \sqrt{2} \\
&\leqslant \left\| \frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi_3}}} \right\|_{L^1(T^1)} (C_2 + \| \varphi_3(x) \|_2) \sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

(2) 当 $\sigma(x,D)$ 为全局伪微分算子时

由于 $\sigma \in C^\infty(T^n \times Z^n)$ 且满足 $|\partial_x^\beta \Delta_\xi^{(\alpha)} \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{r-|\alpha|}$，其中 $x \in T^n, \xi \in Z^n, C_{\alpha,\beta}$ 是依赖于 α, β 的常数.

因此，当 ξ 为有限时，则定存在一有限数 M啊0，使得 $\| \sigma(x,\xi) \|_{s-r} \leqslant M$，这样结合最小支

集样条小波的性质[3]存在有下面定理.

定理 2 设 $\sigma(x,D)$为全局伪微分算子,$u\in L^2(T^n)$,P_j表示在V^j上的正交投影算子,则有

$$\| (W\psi_3\sigma(x,D)P_ju)(x,a) - (W\psi_3P_ju)(x,a)\|_{s-r}$$

$$\leqslant \sum_{P\in Z^n}|h_p|\,\|\frac{\psi_3}{\sqrt{C_{\psi 3}}}\|_{L^1(T^n)}(M\sum_{\xi\in Z^n}|\varphi_3^{\wedge}(2^{-j}\xi)|\,\|e^{i2\pi(2^{-j}(x-P),\xi)}\|_{s-r}2^{-jn/2} +$$

$$2^{jn/2}\|\varphi_3(2^jx-P)\|_s). \tag{25}$$

3 关于 $\eta_k^jAu^j=\eta_k^jf$ 方程解的进一步探讨

当 $u^j\in V^j$ 时有

$$u^j = \sum_{P\in Z^n}h_p\varphi_3^j(x-P), \tag{26}$$

于是有

$$\begin{aligned}\eta_k^jAu^j &= 2^{-nj/2}\eta[A\sum_{P\in Z^n}h_p\varphi_3^j(2^{-j}(x-P+k)]\\ &= 2^{-nj}\sum_{P\in Z^n}h_p\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^{\wedge}(2^{-j}\xi)e^{i2\pi 2^{-j-j}}((k-P),\xi)\cdot\eta(e^{i2\pi 2^{-j}}(x,\xi))\\ &= 2^{-nj}\sum_{P\in Z^n}h_p\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^{\wedge}(2^{-j}\xi)\bar{\eta}^{\wedge}(2^{-j}\xi)e^{i2\pi 2^{-j}((k-P),\xi)}.\end{aligned}$$

令

$$A^j = (\alpha_{k,m}^j)_{k,m\in Z^{n,j}} = (\alpha_{[k-m]}^j)_{k,m\in Z^{n,j}}, \tag{27}$$

其中 $\alpha_k^j := 2^{-nj}\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^{\wedge}(2^{-j}\xi)\bar{\eta}^{\wedge}(2^{-j}\xi)e^{i2\pi 2^{-j}((k-P),\xi)}$. 取酉矩阵

$$F := (2^{-jn/2}e^{-i2\pi 2^{-j}((k-P),m)})_{k,m\in Z^n,j}, \tag{28}$$

做相似变换 $F^{-1}A^jF$ 则有 $F^{-1}A^jF=(\alpha_k\delta_{k,m})_{k,m\in Z^n,j}$,其中

$$\alpha_k := \sum_{m\in Z^{n,j}}\alpha_m^je^{-i2\pi 2^{-j}((k-P),m)}. \tag{29}$$

则 $F^{-1}A^jF$ 是对角阵,主对角线上的元素是 α_k,α_k 亦是 A^j 的特征值,由(29)式知 α_k 为下式表示

$$\alpha_k = 2^{-nj}\sum_{m\in Z^{n,j}}(\sum_{\xi\in Z^n}\sigma(\xi)\varphi_3^{\wedge}(2^{-j}\xi)\bar{\eta}^{\wedge}(2^{-j}\xi)e^{i2\pi 2^{-j}((m-p),\xi)}\cdot e^{-i2\pi 2^{-j}((m-P),k)}). \tag{30}$$

又因为

$$\sum_{m\in Z^{n,j}}e^{-i2\pi 2^{-j}((m-P),(k-\xi))} = \begin{cases}2^{nj}, & \text{当 } \xi = k+2^j\zeta,\zeta\in Z^n,\\ 0, & \text{其余},\end{cases} \tag{31}$$

所以有 $\alpha_k = 2^{j\mu}\sum_{\zeta\in Z^n}\sigma(\xi+2^{-j}k)\varphi_3^{\wedge}(\xi+2^{-j}k)\bar{\eta}^{\wedge}(\xi+2^{-j}k)$. 当取 $\sigma(\xi)=<\xi>^2$,$\eta=\varphi_3$,时有

$$\alpha_k = 2^{j\mu}\sum_{\xi\in Z^n}|\xi+2^{-j}k|^2|\varphi_3^{\wedge}(\xi+2^{-j}k)|^2. \tag{32}$$

由文[1]知 $2^{j\mu}\sum_{\xi\in z^n}|\xi+2^{-j}k|^2|\varphi_3^{\wedge}(\xi+2^{-j}k)|^2$ 收敛到依赖于 2^{-jk}恒不为零的函数. 这样当 h_p 为有限个时得线性非齐次代数方程组,不妨设 $P\in\{(1,1,\cdots 1),(1,2,\cdots,1),\cdots,(\omega,\omega,\cdots,\omega)\}$,

即有

$$[D]\{H\} = \{B\}, \tag{33}$$

其中

$$[D] = \begin{bmatrix} a_{(1,1,1,\cdots,1)} & & \\ & a_{(1,2,1,\cdots,1)} & \\ & & a_{(w,w,w,\cdots w)} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$\{C\} = (h_{(1,1,1,\cdots,1)} h_{(1,2,1,\cdots,1)}, \cdots h_{(w,w,w,\cdots,w)})^T,$$

$$\{B\} = (\eta^{j\cdot} \overline{f}_{(1,1,1\cdots,1)}, \eta^{j\cdot} \overline{f}_{(1,2,1\cdots,1)}, \eta^{j\cdot} \overline{f}_{(\omega,\omega,\omega,\cdots,\omega)})^T, \tag{35}$$

由于矩阵$[D]$非奇异,则(33)存在有唯一组解 $h_p = \eta_p^j \overline{f} / a_P$, $P \in \{(1,1,1,\cdots,1),(1,2,1,\cdots,1),\cdots,(w,w,w,\cdots,w)\}$.

参考文献:

[1] DAHMEN W, PRÖSSDORF S and SCHNEIDER R. *Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: Stability and convergence* [M]. Bericht Nr. 77 August 1992.

[2] RIEDER A. *The Wavelet transform on Sobolev Spaces and its approximation properties* [J]. Numer. Math., 1991, **58**: 875—894.

[3] 金坚明. 小波分析 [M]. 兰州大学出版社,1993 年 4 月.

[4] 金坚明,安玉坤,王才士. 三次样条小波变换 [J]. 西北师范大学学报, 1994, **30**(3):22—26.

Some Notes on the Pseudodifferential Equations

JIN Jian-ming

(Center of Computer, Northwest University, Lanzhou 730070)

Abstract

In this paper, we make study of article [1] and get a new result concerning the minimum support spline wavelet transform and $\eta_k^j A u^j = \eta_k^j f$ equation.

Key words: n-dimensional torus; periodic function; wavelet transform; pseudodifferential operator equations.