Anosov映射的性质*

郭彦平[1,2]，　仇计清[2]

(1. 北京理工大学应用数学系，北京 100081；2. 河北科技大学，河北 石家庄 050018)

摘　要：设 f 是紧致度量空间 M 上的自覆盖映射，本文证明(a)↔(c)结合[2](a)↔(b)且(a)↔(c).

关键词：*Anosov* 映射；伪轨跟踪性质；可扩映射；双曲坐标.

分类号：AMS(1991) 58F/CLC O175

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0095-04

N. Aoki 在[1]对拓扑动力系统进行研究，得到许多关于紧致度量空间上的同胚的一系列重要结论. 本文对紧致度量空间上的自映射进行研究，得到 Anosov 映射的性质及可扩映射的性质.

设 (M,d) 是紧致度量空间. 令 $\widetilde{M}=\{x=\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}\mid x_i\in M, i\in Z\}$，对 $x,y\in\widetilde{M}$，定义度量 $\widetilde{d}(x,y)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2|i|}d(x_i,y_i)$，则 $(\widetilde{M},\widetilde{d})$ 构成紧致的度量空间. 设 f 是 M 上的连续满射，令 $M^f=\{x=\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}\mid x_i\in M, f(x_i)=x_{i+1}, i\in Z\}$，则 M^f 为 $\widetilde{M}$ 的紧致子集. $q_f:M^f\to M^f$ 为左移同胚即 $x=\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$. $P:M^f\to M$ 为 $p(x)=x_0$，则 $f\circ p=P\circ q_f$.

定义1　设 f 是紧致度量空间 M 上的连续满射. 若对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，只要 $d(x_0,y_0)<\delta$，就有 $W_\varepsilon^s(x,f)\cap W_\varepsilon^u(x,f)\neq\varnothing$，其中 $x,y\in M^f$，$Px=x_0$，$Py=y_0$，则称 f 具有标准坐标.

定义2　设 f 是紧致度量空间 M 上的连续满射. 若 f 具有标准坐标，且存在等价的度量 d，$r>0$，$0<\lambda<1$ 和 $a\geqslant 1$ 使得对 $\forall\ x\in M^f$，$Px=x_0$，若 $y_0\in W_r^s(x,f)$，则 $d(f^n(x_0),f^n(y_0))\leqslant a\lambda^n d(x_0,y_0)$，$n\in Z^+$；若 $y_0\in W_r^u(x,f)$，则 $\exists\ y\in M^f$，$Py=y_0$，使 $d(x_{-n},y_{-n})\leqslant a\lambda^n d(x_0,y_0)$，$n\in Z^+$，则称 f 具有双曲坐标.

未说明的定义及符号见[2]和[3]

引理1　f 是具有可扩常数 C 的可扩映射当且仅当存在 $C>0$，使得对所有的 $r>0$，存在 $N>0$，使对任意的 $x\in M^f$ 和任意的 $n>N$，有

$$f^n(W_c^s(x,f))\subset W_r^s(q_f^n(x),f),\quad W_c^u(x,f)\subset f^n(W_r^u(q_f^n(x),f))\qquad(*)$$

证明　设 f 是具有可扩常数 C 的可扩映射，假设 $(*)$ 不成立，则存在 $r>0$，可找到 $x^n,y^n\in M^f$，$m_n>0$，有 $y_0^n\in W_c^s(x^n,f)$，$\lim\limits_{n\to\infty}m_n=+\infty$，以及 $d(x_{m_n}^n,y_{m_n}^n)>r$. 由 $y_0^n\in W_c^s(x^n,f)$ 知 d

---

* 收稿日期：1997-12-17

作者简介：郭彦平(1965-)，男，河北省蔚县人，河北科技大学副教授，现在北京理工大学攻读博士学位.

$(x^n_{n+m_n}, y^n_{n+m_n}) \leqslant C(\forall\, n \geqslant -m_n)$，即 $d(Pq_f^n(q_f^{m_n}(x^n)), Pq_f^n(q_f^{m_n}(y^n))) \leqslant C$，不妨设当 $n \to \infty$ 时 $q_f^{m_n}(x^n) \to x$，$q_f^{m_n}(y^n) \to y$，则有 $d(x_0, y_0) \geqslant r$，并且 $d(Pq_f^n x, Pq_f^n y) \leqslant C$，即 $d(x_n, y_n) \leqslant C, n \in Z$. 这与 f 是可扩的矛盾. 故（＊）的第一式成立. 同理可证（＊）的第二式也成立.

反过来，对任意的 $x, y \in M^f$ 和任意的 $n \in Z$，若 $d(x_n, y_n) \leqslant C$，则 $y_i \in W^s_\varepsilon(q^i(x), f), \forall\, i \in Z$，对任意的 $r > 0$，则存在 $N > 0$，使得 $f^N(y_i) \in W^s_r(q^i_f(x), f)$，即 $d(x_{i+N}, y_{i+N}) \leqslant r$，所以 $x = y$. 故 f 是具有可扩常数 C 的可扩映射.

引理 2 f 是可扩的当且仅当 q_f 是可扩的.

证明 充分性显然，必要性由[2]证明过程可得.

定理 1 若 f 是可扩的，则当 ε 充分小时有

$$W^s(x, f) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n} W^s_\varepsilon(q_f^n(x), f), \quad W^u(x, f) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n W^u_\varepsilon(q_f^n(x), f).$$

证明 设 f 的可扩常数为 C，当 $\varepsilon < C/4$ 时，若 $y_0 \in f^{-n} W^s_\varepsilon(q_f^n(x), f), n \in Z$，则 $f^n(y_0) \in W^s_\varepsilon(q_f^n(x), f)$，由引理 1 知，对 $r > 0$，存在 $N \geqslant 0$，使得当 $m \geqslant N$ 时有 $f^{m+n}(y_0) \in f^m W^s_\varepsilon(q_f^n(x), f) \subset W^s_r(q_f^{m+n}(x), f)$，因此，便有 $d(f^{m+n}(y_0), f^{m+n}(x_0)) \leqslant r (m \geqslant N)$，故 $y_0 \in W^s(x, f)$.

反过来，若 $y_0 \in W^s(x, f)$，则存在 $N \geqslant 0$，使得当 $n \geqslant N$ 时，$d(f^n(y_0), f^n(x_0)) \leqslant \varepsilon$. 因而

$$f^N(y_0) \in W^s_\varepsilon(q_f^N(x), f),$$

所以 $y_0 \in f^{-N} W^s_\varepsilon(q_f^N(x), f)$，故 $W^s(x, f) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n} W^s_\varepsilon(q_f^n(x), f)$.

若 $y_0 \in f^n W^u_\varepsilon(q_f^{-n}(x), f), n \in Z$，则有 $y \in M^f, Py = y_0, y_{-n} \in W^u_\varepsilon(q_f^{-n}(x), f)$，可找到 $N > 0$，使得 $q_f^{-N}(y) \in W^u_{4\varepsilon}(q_f^{-N}(x), q_f)$，即

$$y \in q_f^N W^u_{4\varepsilon}(q_f^{-N}(x), q_f).$$

因为 f 是具可扩常数 C 的可扩映射，由引理 2 知 q_f 也是具有可扩常数 C 的可扩映射，由[1]中的命题 2.39 知 $y \in W^u(x, q_f)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{d}(q_f^{-n}(x), q_f^{-n}(y)) = 0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{-n}, y_{-n}) = 0$. 故 $y_0 \in W^u(x, f)$. 反之，若 $y_0 \in W^u(x, f)$，同理可证 $y_0 \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^n W^u_\varepsilon(q_f^n(x), f)$，故

$$W^u(x, f) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n W^u_\varepsilon(q_f^n(x), f).$$

定义 3 若对任 $x_0 \in M$，$Df(x_0)$ 可逆，这时称 f 为 M 上的自覆盖映射.

定理 2 设 f 是自覆盖映射，则如下条件是等价的.

(a) f 是 Anosov 映射；

(b) f 是具有伪轨跟踪性质的可扩映射；

(c) q_f 具有双曲坐标.

证明 由[2]的引理 1 知(a)与(b)是等价的.

由引理 2 及[1]的定理 5.4 易知由(b)→(c)

再证由(c)可得(b). 若 q_f 具有双曲坐标，由[1]的定理 5.4 知，q_f 是具有伪轨跟踪性质的可扩映射，由引理 2 知，f 是可扩映射. 下面证明 f 具有伪轨跟踪性质. 对于任意取定的 $\alpha > 0$，由于 q_f 具有伪轨跟踪性质，因此存在 $\beta_1 > 0$，使得 q_f 的每一条 β_1-伪轨有 M^f 中的某点对其 α-跟踪. 设 $l = \mathrm{diam}(M)$，则存在自然数 N，使得

$$\sum_{i=-\infty}^{-(N+1)} \frac{l}{2^{-i}} + \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{l}{2^i} < \frac{\beta_1}{2}.$$

因为 f 是自覆盖映射，且 M 是紧致的，所以存在 $\beta > 0$，使得当 $d(x_0, y_0) < \beta$ 时，有 $x, y \in M^f$，

且 $Px=x_0, Py=y_0$，满足 $d(x_i,y_i)<\frac{\beta_1}{6}, -N\leqslant i\leqslant N$. 设 $\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ 是 f 的 β—伪轨，即 $d(f(x_0^k), x_0^{k+1})<\beta, \forall k\in Z$，存在 $x^k\in M^f, Px^k=x_0^k$，使得 $d(f(x_i^k), x_i^{k+1})<\frac{\beta_1}{6}, -N\leqslant i\leqslant N, \forall k\in\leqslant Z$. 于是，得

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(q_f(x^k), x^{k+1}) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_{i+1}^k, x_i^{k+1}) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{-(N+1)}\frac{1}{2^{-i}}d(x_{i+1}^k, x_i^{k+1})+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}d(x_{i+1}^k, x_i^{k+1})+\sum_{i=-N}^{N}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_{i+1}^k, x_i^{k+1}) \\
&\leqslant \sum_{i=-\infty}^{-(N+1)}\frac{l}{2^{-i}}+\sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{l}{2^i}+\sum_{i=-N}^{N}\frac{1}{2^{|i|}}\cdot\frac{\beta_1}{6}<\frac{\beta_1}{2}+3\cdot\frac{\beta_1}{6}=\beta_1.
\end{aligned}
$$

所以 $\{x^k\}_{-\infty}^{+\infty}$ 是 q_f 的 β_1—伪轨，故存在 $z=\{z_i\}\in M^f$ 对其 α—跟踪，即 $\tilde{d}(x^k, q_f^k(z))<\alpha, \forall k\in Z$，于是 $d(x_0^k, z_k)\leqslant\tilde{d}(x^k, q_f^k(z))<\alpha, \forall k\in Z$. 故 f 的 β-伪轨 $\{x_0^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ 被 f 的轨道 $z\alpha$-跟踪. 从而 f 具有伪轨跟踪性质.

定理 3 若 f 具有双曲坐标，则 f 是具有伪轨跟踪性质的可扩映射.

证明 先证 f 是可扩的. 设 $x, y\in M^f, d(x_n, y_n)\leqslant\delta, \forall n\in Z$，故 $y_n\in W_\delta^u(q_f^n(x), f), \forall n\in Z$, $d(x_i, y_i)=d(x_{n-(n-i)}, y_{n-(n-i)})\leqslant a\lambda^{n-i}d(x_n, y_n)\leqslant a\lambda^{n-i}\delta, \forall i\in Z, n>i$. 令 $n\to\infty$，得 $x_i=y_i$, $\forall i\in Z$，所以 f 是可扩的.

再证 f 具有伪跟踪性质. 取 $\varepsilon>0$ 足够小，使得 $\varepsilon(\frac{3}{2}+\frac{a\lambda}{1-\lambda})<\beta$. 对于上面的 $\varepsilon>0$，存在 $0<\delta<\varepsilon$ 使得若 $d(x_0, y_0)<\delta$，就有 $W_\varepsilon^s(x,f)\cap W_\varepsilon^u(y,f)\neq\varnothing$. 取自然数 N 充分大，使得 $a\lambda^N\varepsilon<\frac{1}{2}\delta$. 由[4]的第十九章引理 1.2 知，存在 $\alpha>0$，使得任何 α-伪轨 $\{y_i\}_{i=1}^N$ 适合不等式

$$
d(f^i(y_0), y_i)<\frac{1}{2}\delta(0\leqslant i\leqslant N).
$$

设 $r\in Z^+$，对 α-伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^{rN}, d(f^j(x_{kN}), x_{kN+j})<\frac{\delta}{2}, (j=0,1,\cdots,N, k=0,1,\cdots,r-1)$. 下面我们归纳定义 $x'_{kN}, y^k\in M^f$ 满足 $x'_{kN}\in W_\varepsilon^s(x^k,f), x_0^k=x_{kN}, y_{kN}^k=x'_{kN}, d(y_{kN-l}^k, y_{kN-l}^{k-1})<a\lambda^l d(y_{kN}^k, y_{kN}^{k-1})=a\lambda^l d(x'_{kN}, f^N(x'_{(k-1)}))(k=0,1,\cdots,r; l\in Z^+)$.

对 $k=0$，令 $x'_0=x_0$，任取 $y^0\in M^f, Py^0=x_0$ 即可. 假设对 $k\leqslant s, x'_{kN}, y^k\in M^f$ 已有定义.

$$
\begin{aligned}
d(Pq^{(s+1)N}(y^s), x_{(s+1)N}) &= d(f^N(x'_{sN}), x_{(s+1)N}) \\
&\leqslant d(f^N(x'_{sN}), f^N(x_{sN}))+d(f^N(x_{sN}), x_{(s+1)N}) \\
&\leqslant a\lambda^N\varepsilon+\frac{\delta}{2}<\delta.
\end{aligned}
$$

于是 $W_\varepsilon^s(x^{s+1},f)\cap W_\varepsilon^u(q^{(s+1)N}(y^s),f)\neq\varnothing$. 取 $x'_{(s+1)N}\in W_\varepsilon^s(x^{s+1},f)\cap W_\varepsilon^u(q^{(s+1)N}(y^s),f)$, $x'_{(s+1)N}\in W_\varepsilon^s(x^{s+1},f), x_0^{s+1}=x_{(s+1)N}$，且存在 $y^{s+1}\in M^f, y_{(s+1)N}^{s+1}=x'_{(s+1)N}, d(y_{(s+1)N-l}^{s+1}, y_{(s+1)N-l}^s)<a\lambda^l d(y_{(s+1)N}^{s+1}, y_{(s+1)N}^s)=a\lambda^l d(x'_{(s+1)N}, f^N(x'_{sN}))(l\in Z^+)$. 对 $0\leqslant i\leqslant rN$，有 s 使得 $sN\leqslant i\leqslant(s+1)N$，

$$
\begin{aligned}
d(y_i^r, x_i) &\leqslant d(y_i^r, f^{i-sN}x'_{sN})+d(f^{i-sN}x'_{sN}, f^{i-sN}x_{sN})+d(f^{i-sN}x_{sN}, x_{sN+(i-sN)}) \\
&\leqslant d(y_{rN-(rN-i)}^r, y_{rN-(rN-i)}^{r-1})+d(y_{(r-1)N-((r-1)N-i)}^{r-1}, y_{(r-1)N-(r-1)N-i}^{r-2})+ \\
&\quad\cdots+d(y_{(s+1)N-((s+1)N-i)}^{s+1}, y_{(s+1)N-((s+1)N-i)}^s)+\varepsilon+\frac{\delta}{2}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant a\lambda^{rN-i}\varepsilon+a\lambda^{(r-1)N-i}\varepsilon+\cdots+a\lambda^{(s+1)N-i}\varepsilon+\varepsilon+\frac{\delta}{2}$$

$$\leqslant\frac{a\lambda}{1-\lambda}\varepsilon+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}<\beta.$$

故 $y'\beta$-跟踪$\{x_i\}_{i=0}^{rN}$,从而可证 f 具有伪轨跟踪性质.

推论 1 设 f 具有双曲坐标,则 f 是单一化拓扑稳定的.

证明 由定理 3 及文献[3]立即可得.

参考文献:

[1] NOBUO A. *Topological Dynamics, Topics in General Topology* [J]. Elsevier Science Publishers B. V., 1989, 626—740.

[2] 孙文祥. Anosov 映射的 ζ 函数 [J],数学年刊 A 辑, 1991, **12**(4): 492—495.
SUN Wen-xiang. *ζ-functions of Anosov maps* [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1991, **12**A(4): 492—495.

[3] SUN Wen-xiang. *The orbit shift topological stalility of Anosov maps* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1992, **8**(3): 259—263.

[4] 张筑生. 微分动力系统原理 [M]. 北京:科学出版社,1997.
ZHANG Zhu-sheng. *The Theory of Differentiable Dynamical Systems* [M]. Science Press, Beijing, 1997.

Properties of Anosov Maps

GUO Yan-ping[1], QIU Ji-qing[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Beijing University of Technology, Beijing 100081, China;
2. Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China)

Abstract: Suppose that f be a self-covering map on a compact metric space M. This paper proves that follwing conditions are equivalent: (a) f is a Anosov map, (b) f is expansive and has the pseudo-orbit-tracting property, (c) q_f has hyperbolic coordinates.

Key words: Anosov map; pseudo-orbit-tracting property; expansive map; hyperbolic coordinate.