关于一类高次不定方程的解*

袁平之[1]，　罗家贵[2]
(1. 长沙铁道学院数力系，湖南 长沙 410075；　2. 四川大学数学系，四川 成都 610064)

摘　要：本文得到了方程$\frac{ax^n\pm c}{ax^m\pm c}=y^2+1$，$c=1,2,4$适合$m\equiv n \pmod 2$的全部解.

关键词：指数方程；Pell方程；最小解；基本解.
分类号：AMS(1991) 11D61/CLC O153.1
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0099-06

1 引　言

利用Pell方程的一些基本性质，孙琦、袁平之[1]得到了不定方程

$$\frac{ax^n\pm 1}{ax\pm 1}=y^2, 2\nmid n, n>1 \tag{1}$$

的全部解；罗家贵[2]用文[1]中类似的方法得到了不定方程

$$\frac{ax^n\pm c}{ax\pm c}=y^2, 2\nmid n, n>1, c=2,4 \tag{2}$$

的全部解；曹珍富[3]得到了不定方程

$$\frac{ax^n\pm 1}{abx\pm 1}=by^2, 2\nmid n, n>1 \tag{3}$$

的全部解；袁平之[4]得到了下面一般方程

$$\frac{ax^n\pm c}{abxt^2\pm c}=by^2, c=1,2,4, 2\nmid n, n>1 \tag{4}$$

的全部解

本文将讨论下面形式的不定方程

$$\frac{ax^n\pm c}{ax^m\pm c}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0, c=1,2,4 \tag{5}$$

的整数解(a,x,y,m,n)，不失一般性，本文以下要求$a>0, x>0, y>0$，我们有

定理1　1) 不定方程

$$\frac{ax^n+1}{ax^m+1}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0 \tag{6}$$

* 收稿日期：1997-07-31
基金项目：国家自然科学基金(19671060)及湖南省教委基金(97B04)资助项目
作者简介：袁平之(1966-)，男，博士后，长沙铁道学院教授.

没有整数解；

2) 不定方程

$$\frac{ax^n-1}{ax^m-1}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0 \tag{7}$$

仅有平凡解 $a=x^{n-2m}, y=x^{\frac{n-m}{2}}, n\geqslant 2m, n,m,x$ 为正整数参变量.

定理 2 不定方程

$$\frac{ax^n\pm 2}{ax^m\pm 2}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0, 2\nmid ax \tag{8}$$

没有整数解.

定理 3 1) 不定方程

$$\frac{ax^n+4}{ax^m+4}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0, 2\nmid ax \tag{9}$$

没有整数解；

2) 不定方程

$$\frac{ax^n-4}{ax^m-4}=y^2+1, m\equiv n \pmod 2), n>m>0, 2\nmid ax \tag{10}$$

仅有解 $(a,x,y,n,m)=(1,3,12,6,2),(1,9,12,3,1),(3,3,12,5,1)$.

2 基本引理

上述三个定理的证明，需要用到如下几个引理.

引理 1 设 $x>0, y>0$ 是 Pell 方程

$$x^2-Dy^2=1, D>0 \text{ 无平方因子} \tag{11}$$

的一个解，$\varepsilon=x_0+y_0\sqrt{D}$ 是(11)的基本解，若 x 的所有素因子整除 x_0，则 $x+y\sqrt{D}=\varepsilon$.

证明 由(11)可设

$$x+y\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^n, \quad n>0. \tag{12}$$

若 $n=1$，则问题已得到证明. 若 $n>1$，则 $x>1$；由(12)

1) $2|n$ 时，有

$$x=\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2j}x_0^{n-2j}(Dy_0^2)^j. \tag{13}$$

设 p 是 x 的一个素因子，由条件 x 的素因子均整除 x_0，结合(13)得 $p|(Dy_0^2)^{\frac{n}{2}}$，但 $(x_0, Dy_0)=1$ 故不可能；

2) $2\nmid n$ 时，可设

$$x+y\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^n=x_n+y_n\sqrt{D}. \tag{14}$$

若 $r|n$，则 $x_r+y_r\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^r$，$x_r|x_n$，因此 x_n 满足引理 1 中的条件，则 x_r 也满足同样的条件. 现设 p 是 n 的任一素因子，$2\nmid p$，我们有

$$x_p+y_p\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^p. \tag{15}$$

由(15)有

$$\frac{x_p}{x_0}=\sum_{j=0}^{(p-1)/2}\binom{p}{2j}x_0^{p-2j-1}(Dy_0^2)^j. \tag{16}$$

由于 $x_p > x_0$,故 $x_p/x_0 > 1$. 设 $q|x_p/x_0$ 是 x_p/x_0 的任一给定的素因子,则 $q|x_p$,但 x_p 的所有素因子均整除 x_0,所以 $q|x_0$,(16) 式给出 $q|p(y_0^2D)^{\frac{p-1}{2}}$,由于 $(q,y_0D)=1$,所以 $q|p$,$q=p$. 现在我们进一步指出 x_p/x_0 无平方因子,否则可设 $p^2|x_p/x_0$,由(16) 得 $p^2|p(y_0^2D)^{\frac{p-1}{2}}$,此不可能,故 $x_p/x_1=p$;

另一方面,在 $p>3$ 时,(16) 给出

$$\frac{x_p}{x_1}=\sum_{j=0}^{p-1/2}\binom{p}{2j}x_0^{p-2j-1}(y_0^2D)^j>\frac{p(p-1)}{2}\geqslant p$$

这一矛盾结果表明,n 不含大于 3 的素因子,现设 $n=3^f$,$f\geqslant 1$,则 $x_3|x_n$,且

$$x_3/x_1=x_0^2+3Dy_0^2=4x_0^2-3.$$

由于 x_3/x_1 的素因子整除 x_0,所以 $x_3/x_1=3^e$,且

$$3^e+3=4x_0^2\quad(e\geqslant 1), \tag{17}$$

事实上(17) 式不可能成立,因为 $e>1$ 时,由(17) 得 $3^2|3$,此不可能;若 $e=1$,则 $2x_0^2=3$,显然也不可能成立.

综合 1)、2) 知 $n=1$,即引理 1 的结论成立.

引理 2 设 k,l 为正整数,kl 不是完全平方数,$\eta=a+b\sqrt{kl}$ 为 Pell 方程 $x^2-kly^2=1$ 的基本解

1)[1]若 $k>1$ 且 $kx^2-ly^2=1$ 有整数解,设 $\varepsilon=x_1\sqrt{k}+y_1\sqrt{l}$ 为此方程的最小解,则

$$\eta=\varepsilon^2.$$

2)[2]若 $2\nmid kl$ 且 $kx^2-ly^2=2$ 有整数解,并设 $\varepsilon=x_1\sqrt{k}+y_1\sqrt{l}$ 为其最小解,则

$$\eta=\varepsilon^2/2.$$

3) 若 $2\nmid l$,$l>1$,$k=1$ 且 $x^2-ly^2=4$ 有互素的整数解,并设 $\varepsilon=x_1+y_1\sqrt{l}$,$(x_1,y_1)=1$ 为其最小解,则 $\eta=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3$.

4) 若 $2\nmid kl$ 且 $kx^2-ly^2=4$ 有互素的整数解,$k>1$ 并设 $\varepsilon_0=x_0\sqrt{k}+y_0\sqrt{l}$,$(x_0,y_0)=1$ 为其最小解,$\varepsilon=x_1\sqrt{k}+y_1\sqrt{l}$ 为 $kx^2-ly^2=1$ 的最小解,则 $\varepsilon=(\frac{\varepsilon_0}{2})^3$,因而 $\eta=(\frac{\varepsilon_0}{2})^6$.

证明 3) 由于 $(\frac{\varepsilon}{2})^3=\frac{ly_1^2+1}{2}x_1+\frac{x_1^2-1}{2}y_1\sqrt{l}$,$\frac{ly_1^2+1}{2}x_1$,$\frac{x_1^2-1}{2}y_1$ 均为正整数且 $(\frac{ly_1^2+1}{2}x_1)^2-l(\frac{x_1^2-1}{2}y_1)^2=1$,故 $(\frac{\varepsilon}{2})^3$ 是 $x^2-ly^2=1$ 的一个解. 如果 $(\frac{\varepsilon}{2})^3\neq\eta$,则有 $1<\eta<(\frac{\varepsilon}{2})^3$;若 $1<\eta<(\frac{\varepsilon}{2})^2$,则有 $\frac{\bar{\varepsilon}}{2}<\frac{\bar{\varepsilon}}{2}\eta<\frac{\varepsilon}{2}$ $(\bar{\varepsilon}=x_1-y_1\sqrt{l})$. 由此可得

$$0<\frac{x_1-y_1\sqrt{l}}{2}<\frac{X+Y\sqrt{l}}{2}<\frac{x_1+y_1\sqrt{l}}{2}, \tag{18}$$

其中 $X = ax_1 - bly_1, Y = bx_1 - ay_1$. 易证 $2\nmid XY$ 且 $X + Y\sqrt{l}$ 是 $x^2 - ly^2 = 4$ 的一个解，如果 $1 < \frac{X + Y\sqrt{l}}{2} < \frac{x_1 + y_1\sqrt{l}}{2}$，则有 $0 < \frac{x_1 - y_1\sqrt{l}}{2} < \frac{X - Y\sqrt{l}}{2} < 1$，故有 $X > 0$，$Y > 0$，此与 $x_1 + y_1\sqrt{l}$ 是 $x^2 - ly^2 = 4$ 的最小解矛盾. 如果 $0 < \frac{X + Y\sqrt{l}}{2} < 1$，则有 $\frac{X - Y\sqrt{l}}{2} > 1$，且由(18) 式有 $\frac{x_1 - y_1\sqrt{l}}{2} < \frac{X + Y\sqrt{l}}{2}$，因此

$$\frac{X - Y\sqrt{l}}{2} < \frac{x_1 + y_1\sqrt{l}}{2},$$

故亦有 $X > 0$, $-Y > 0$，此与 ε 是最小解矛盾.

若 $(\frac{\varepsilon}{2})^2 < \eta < (\frac{\varepsilon}{2})^3$，则有 $1 < \eta(\frac{\bar{\varepsilon}}{2})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. 类似 $1 < \eta < (\frac{\varepsilon}{2})^2$ 的证明中 $1 < \frac{X + Y\sqrt{l}}{2} < \frac{x_1 + y_1\sqrt{l}}{2}$ 这一情形讨论得矛盾. 因此 $\eta = (\frac{\varepsilon}{2})^3$

与 3) 类似讨论可证 $\varepsilon = (\frac{\varepsilon_0}{2})^3$，结合 1)便完全证明了 4).

引理 3 设 Pell 方程 $x^2 - Dy^2 = 1$ 的基本解为 $\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{D}$; $x + y\sqrt{D} = \varepsilon^n, n > 0$ 是其任一正整数解，则 $x_0 \mid x$ 的充分必要条件是 $2\nmid n$.

定理 1 的证明 由(6) 得

$$ax^m(x^{n-m} - 1) = (ax^m + 1)y^2. \tag{19}$$

由于 $(ax^m, ax^m + 1) = 1$，所以 $ax^m \mid y^2$. 设 $ax^m = bu^2, b > 0$ 无平方因子，$u > 0$，则 $bu \mid y$. 设 $y = buy_1$，代入(19) 得

$$x^{n-m} - (bu^2 + 1)by_1^2 = 1. \tag{20}$$

由于 $(bu^2 + 1)x^2 - by^2 = 1$ 的最小解为 $\sqrt{bu^2 + 1} + u\sqrt{b}$, $bu^2 + 1 > 1$，故由引理 2 的 1) 知 $x^2 - (bu^2 + 1)by^2 = 1$ 的基本解为 $2bu^2 + 1 + 2u\sqrt{b(bu^2 + 1)}$. 由(20) 得

$$x^{\frac{n-m}{2}} + y_1\sqrt{b(bu^2 + 1)} = \left(2bu^2 + 1 + 2u\sqrt{b(bu^2 + 1)}\right)^s, s \geqslant 1. \tag{21}$$

若 s 为奇数由引理 3 得 $2bu^2 + 1 \mid x^{\frac{n-m}{2}}$ 即 $2ax^m + 1 \mid x^{\frac{n-m}{2}}$，此不可能. 若 s 为偶数，由(21) 得

$$x^{\frac{n-m}{2}} = \sum_{j=0}^{\frac{s}{2}} \binom{s}{2j} (2bu^2 + 1)^{s-2j}[4bu^2(bu^2 + 1)]^j. \tag{22}$$

由于 $ax^m = bu^2, x > 1$，所以存在素数 $p \mid (x, bu^2)$，由(22) 得 $p \mid (2bu^2 + 1)^s$，从而 $p \mid 2bu^2 + 1$，此不可能，故不定方程(6) 无解.

由(7) 式得

$$ax^m(x^{n-m} - 1) = (ax^m - 1)y^2. \tag{23}$$

由于 $(ax^m, ax^m - 1) = 1$，所以 $ax^m \mid y^2$. 设 $ax^m = bu^2, b > 0$ 无平方因子，$u > 0$，则 $bu \mid y$，设 $y = buy_1$. 代入(23) 得

$$x^{n-m} - (bu^2 - 1)by_1^2 = 1. \tag{24}$$

若 $b > 1$，则由于 $bx^2 - (bu^2 - 1)y^2 = 1$ 的最小解为 $u\sqrt{b} + \sqrt{bu^2 - 1}$，同上讨论知 $n > m$ 时，(24) 式不成立；若 $b = 1$，由于 $x^2 - (u^2 - 1)y^2 = 1$ 的基本解为 $u + \sqrt{u^2 - 1}$，而由 $ax^m =$

u^2 得 x 的素因子整除 u，由引理 1 及(24) 得：$x^{\frac{n-m}{2}}=u, y_1=1, ax^m=x^{n-m}$，所以

$$a=x^{n-2m}, y=uy_1=x^{\frac{n-m}{2}}.$$

定理 2 的证明 由(8) 得

$$ax^m(x^{n-m}-1)=(ax^m\pm 2)y^2. \tag{25}$$

由于$(ax^m, ax^m\pm 2)=1$，故 $ax^m|y^2$. 设 $ax^m=bu^2, b>0$ 无平方因子，$u>0$，则 $bu|y$. 令 $y=buy_1$ 代入(25) 得

$$x^{n-m}-(bu^2\pm 2)by_1^2=1 \tag{26}$$

由于 $bx^2-(bu^2\pm 2)y^2=\mp 2$ 的最小解为 $u\sqrt{b}+\sqrt{bu^2\pm 2}$，由引理 2 的 2) 得 $x^2-(bu^2\pm 2)by^2=1$ 的基本解为 $bu^2\pm 1+u\sqrt{b(bu^2\pm 2)}$. 由(26) 得

$$x^{\frac{n-m}{2}}+y_1\sqrt{b(bu^2\pm 2)}=\left(bu^2\pm 1+u\sqrt{b(bu^2\pm 2)}\right)^s, s\geqslant 1. \tag{27}$$

若 s 为奇数，由引理 3 得 $bu^2\pm 1|x^{\frac{n-m}{2}}$ 即 $ax^m\pm 1|x^{\frac{n-m}{2}}$，此不可能；若 s 为偶数，由(27) 得

$$x^{\frac{n-m}{2}}=\sum_{j=0}^{s/2}\binom{s}{2j}(bu^2\pm 1)^{s-2j}[bu^2(bu^2\pm 2)]^j. \tag{28}$$

由 $ax^m=bu^2, x>1$ 知存在素数 $p|(x, bu^2)$，由(28) 得 $p|(bu^2\pm 1)^s, p|bu^2\pm 1$，此不可能.

□

定理 3 的证明 由(9) 得

$$ax^m(x^{n-m}-1)=(ax^m+4)y^2. \tag{29}$$

与前面类似讨论可设 $ax^m=bu^2, b>0$ 无平方因子，$u>0, y=buy_1$ 代入(29) 得

$$x^{n-m}-(bu^2+4)by_1^2=1. \tag{30}$$

由于$(bu^2+4)x^2-by^2=4$ 的最小解为 $\sqrt{bu^2+4}+u\sqrt{b}$，由引理2的4) 得 $x^2-(bu^2+4)by^2=1$ 的基本解为$\left(\frac{\sqrt{bu^2+4}+u\sqrt{b}}{2}\right)^6=\left(\frac{bu^2+2+u\sqrt{b(bu^2+4)}}{2}\right)^3$. 由(30) 得：

$$x^{\frac{n-m}{2}}+y_1\sqrt{b(bu^2+4)}=\left(\frac{bu^2+2+u\sqrt{b(bu^2+4)}}{2}\right)^{3s}, s\geqslant 1. \tag{31}$$

若 s 为奇数，由(31) 得 $bu^2+2|2^{3s}x^{\frac{n-m}{2}}$，但 $2\nmid ax$，知$(bu^2+2, 2)=1$，所以 $bu^2+2|x^{\frac{n-m}{2}}$，即 $ax^m+2|x^{\frac{n-m}{2}}$，此不可能；若 s 为偶数，则由(31) 得

$$2^{3s}x^{\frac{n-m}{2}}=\sum_{j=0}^{\frac{3s}{2}}\binom{3s}{2j}(bu^2+2)^{3s-2j}[(bu^2+4)bu^2]^j. \tag{32}$$

由 $ax^m=bu^2, x>1$ 知存在奇素数 $p|(x, bu^2)$，由(32) 得 $p|(bu^2+2)^{3s}$，从而 $p|bu^2+2$，又 $p|bu^2$，所以 $p|2$ 与 p 是奇素数矛盾，故不定方程(9) 无整数解.

由(10) 得

$$ax^m(x^{n-m}-1)=(ax^m-4)y^2. \tag{33}$$

同前讨论可设 $ax^m=bu^2, b>0$ 无平方因子，$u>0, y=buy_1$ 代入(33) 得

$$x^{n-m}-(bu^2-4)by_1^2=1. \tag{34}$$

若 $b>1$，由于 $bx^2-(bu^2-4)y^2=4$ 的最小解为 $u\sqrt{b}+\sqrt{bu^2-4}$，由引理 2 的 4) 得 $x^2-(bu^2-4)by^2=1$ 的基本解为$\left(\frac{u\sqrt{b}+\sqrt{bu^2-4}}{2}\right)^6=\left(\frac{bu^2-2+u\sqrt{b(bu^2-4)}}{2}\right)^3$，

同上讨论知(34)不可能成立；

若 $b=1$，由于 $x^2-(u^2-4)y^2=4$ 的最小解为 $u+\sqrt{u^2-4}$，由引理 2 的 3) 知 $x^2-(u^2-4)y^2=1$ 的基本解为 $\left(\frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2}\right)^3=\frac{u(u^2-3)}{2}+\frac{u^2-1}{2}\sqrt{u^2-4}$. 由 $ax^m=u^2$ 得 x 的所有素因子均整除 u，由引理 1 得

$$x^{\frac{n-m}{2}}=\frac{u(u^2-3)}{2}. \tag{35}$$

由(35)及 x 的所有素因子整除 u 得 u^2-3 只有 2 和 3 这两个素因子且 u 仅有 3 的因子，由此得：$u=3$，$x^{\frac{n-m}{2}}=9$，$ax^m=9$，故 $(a,x,m,n)=(1,3,2,6),(1,9,1,3),(3,3,1,5)$. □

参考文献：

[1] 孙 琦，袁平之. 关于丢番图方程 $(ax^n-1)/(ax-1)=y^2$ 和 $(ax^n+1)/(ax+1)=y^2$ [J]，四川大学学报(专辑)，1989，**26**(1)：20—24.
SUN Qi, YUAN Ping-zhi. *On the diophantine equations* $\frac{ax^n-1}{ax-1}=y^2$ *and* $\frac{ax^n+1}{ax+1}=y^2$[J]. J. Sichuan Univ. Special Issue, 1989, **26**(1): 20—24.

[2] 罗家贵. 关于 Stormer 定理的推广和应用 [J]. 四川大学学报，1991，**28**(4)：469—474.
LUO Jia-gui. *Extensions and applications on Stormer theory* [J]. J. Sichuan Univ. Natural Sci., 1991, **28**(4): 469—474.

[3] 曹珍富. 关于丢番图方程 $\frac{ax^n-1}{abx-1}=by^2$ [J]. 科学通报，1990，**35**(7)：492—494.
CAO Zhen-fu. *On the diophantine equaton* $\frac{ax^n-1}{abx-1}=by^2$[J]. Chinese Sci. Bull., 1990, **35**(7): 492—494.

[4] 袁平之. Pell 方程的一个新性质和应用 [J]. 长沙铁道学院学报，1994，**12**(3)：78—84.
YUAN Ping-zhi. *A new proposition and applications on Pell's equation* [J]. J. Changsha Railway Inst., 1994, **12**(3): 78—84.

On Solutions of Higher Degree Diophantine Equation

YUAN Ping-zhi[1], LUO Jia-gui[2]

(1. Dept. of Math. & Mech., Changsha Railway Institute, Changsha 410075, China;
2. Dept. of Math., Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we obtain all positive integral solution of the equation $\frac{ax^n\pm c}{ax^m\pm c}=y^2+1$, $c=1,2,4$ with $m\equiv n \pmod 2$.

Key words: exponential diophantine equations; Pell's equations; minimal solution; fundamental solution.