第21卷第1期 2001年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 1 Feb. 2001

双参数广义加权平均值及其单调性*

郭白妮， 祁 锋
(焦作工学院基础部，河南 焦作 454000)

摘 要：本文定义了双参数广义加权平均值，研究了它的基本性质和单调性，推广了加权平均值的概念，给出它的一些应用.

关键词：双参数广义加权平均值；基本性质；单调性；Tchebycheff 积分不等式.
分类号：AMS(1991) 26A24，26A48，26D15/CLC O178
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0105-07

1 引 言

众所周知，算术平均值 $A(x,y)=(x+y)/2$，几何平均值 $G(x,y)=\sqrt{xy}$，以及调和平均值 $H=G^2/A$ 是最简单且历史悠久的古典平均值.它们已有许多推广，拓展，变形和加强形式，有丰硕的研究成果，它们是解析不等式理论的主要研究对象.关于平均值的研究有丰富的参考文献，详细请见[1]—[5]，[8]—[15]，[17]和[29]—[33].

本文作者在[16]和[18]—[28]中用新的简单方法对双参数拓广平均 E 作了深入的研究.

在本文中，我们将定义所谓的带有两个参数的广义加权平均 $M_{p,f}(r,s;x,y)$，并且给出它的基本性质，研究它的单调性及其应用.

需要特别指出的是，$M_{p,f}(r,s;x,y)$ 的研究不仅有趣而且重要，因为大多数双变量平均值、广义平均值以及一些加权平均值都是它的特殊情形，同时，研究如此复杂的函数富有挑战和刺激性.

2 定义和基本性质

定义 1 设 $x,y,r,s\in R$，$p\neq0$ 和 $f>0$ 是定义在区间 $[x,y]$ 上的非负的可积函数.具有两个参数 r 和 s 以及权函数 p 的广义加权平均定义为：

* 收稿日期：1997-05-28；修订日期：1999-05-22
基金项目：国家自然科学基金(10001016)、河南省自然科学基金(004051800)、河南省教委自然科学基础研究项目基金(1999110004)和焦作工学院博士基金资助.
作者简介：郭白妮(1964-)，女，河南修武人，学士，焦作工学院副教授.

$$M_{p,f}(r,s;x,y)=\left(\frac{\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u}{\int_x^y p(u)f^s(u)\mathrm{d}u}\right)^{1/(s-r)}, \quad (r-s)(x-y)\neq 0; \tag{1}$$

$$M_{p,f}(r,r;x,y)=\exp\left(\frac{\int_x^y p(u)f^r(u)\ln f(u)\mathrm{d}u}{\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u}\right), \quad r(x-y)\neq 0; \tag{2}$$

$$M_{p,f}(r,0;x,y)=\left(\frac{\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u}{\int_x^y p(u)\mathrm{d}u}\right)^{1/r}, \quad r(x-y)\neq 0; \tag{3}$$

$$M_{p,f}(0,0;x,y)=\exp\left(\frac{\int_x^y p(u)\ln f(u)\mathrm{d}u}{\int_x^y p(u)\mathrm{d}u}\right), \quad x-y\neq 0; \tag{4}$$

$$M_{p,f}(r,s;x,x)=f(x).$$

为方便起见，总是认为 $M_{p,f}(r,s;x,y)=M_{p,f}(r,s)=M_{p,f}(x,y)=M_{p,f}$，并且在上下文中不致引起混淆.

定理 1 $M_{p,f}(r,s;x,y)$在区域$\{(r,s;x,y):x,y,\ r,s\in R\}$上连续.

引理 1 设 f 和非负函数 $g\geqslant 0$ 是$[a,b]$上的可积函数，$f(t)/g(t)$有有限个可去间断点，那末至少存在一个点 $\theta\in(a,b)$，使得

$$\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}=\lim_{t\to\theta}\frac{f(t)}{g(t)}. \tag{5}$$

将引理 1 叫做 Cauchy 中值定理的积分形式(the revised Cauchy mean value theorem in integral form). 关于它的证明可以参阅[26]. 由此可得

定理 2 $M_{p,f}(r,s;x,y)$具有下列基本性质

$$m\leqslant M_{p,f}(r,s;x,y)\leqslant M, \tag{6}$$

$$M_{p,f}(r,s;x,y)=M_{p,f}(r,s;y,x)=M_{p,f}(s,r;x,y), \tag{7}$$

$$M_{p,f}^{s-r}(r,s)=M_{p,f}^{s-t}(t,s)M_{p,f}^{t-r}(r,t), \tag{8}$$

其中 $m=\inf f(u)$，$M=\sup f(u)$.

3 单调性的证明

命题 1 设 $\varphi=\varphi(t)=\int_x^y p(u)f^t(u)\mathrm{d}u$，且 $p(u)$ 为非负连续函数，$f(u)$ 是区间$[x,y]$上的正连续函数. 如果 $f(u)$ 是单调的，则对于 $k,i,j\in N$，有

$$\varphi^{(2(i+k)+1)}(t)\varphi^{(2(j+k)+1)}(t)\leqslant\varphi^{(2k)}(t)\varphi^{(2(i+j+k+1))}(t), \tag{9}$$

而且 $\varphi^{(2(j+k)+1)}(t)/\varphi^{(2k)}(t)$是单调递增的.

证明 考虑到 $f(u)$是连续的，所以可以交换导数和积分的顺序. 直接计算得

$$\varphi^{(n)}(t)=\int_x^y p(u)f^t(u)(\ln f(u))^n\mathrm{d}u. \tag{10}$$

将 Tchebycheff 积分不等式应用于函数 $p(u)f^t(u)(\ln f(u))^{2k}$，$(\ln f(u))^{2i+1}$ 和 $(\ln f(u))^{2j+1}$，$i,j,k\in\boldsymbol{N}$，$t\in\boldsymbol{R}$，$u\in[x,y]$，可以直接得到不等式(9).

根据(9)式并且直接计算得到

$$\left(\frac{\varphi^{(2(j+k)+1)}(t)}{(\varphi^{(2j)}(t))'}\right)'=\frac{\varphi^{(2(j+k+1))}(t)\varphi^{(2j)}(t)-\varphi^{(2(j+k)+1)}(t)\varphi^{(2j+1)}(t)}{(\varphi^{(2j)}(t))^2}>0. \tag{11}$$

因此，容易得到需要证明的单调性. □

定理 3 设 $p(u)\neq 0$ 为非负连续函数，$f(u)$ 为正的单调连续函数. 那末，$M_{p,f}(r,s)$ 是 r 和 s 的单调递增函数.

证明 对于 $r(x-y)\neq 0$，利用(3)式直接计算可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\ln M_{p,f}(r,0))=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}r-\ln\frac{\varphi(r)}{\varphi(0)}\right). \tag{12}$$

根据微分中值定理以及命题 1 有

$$\ln\frac{\varphi(r)}{\varphi(0)}=\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}r<\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}r, \tag{13}$$

其中 θ 介于 0 和 r 间. 因此 $\mathrm{d}(\ln M_{p,f}(r,0))/\mathrm{d}r>0$，从而 $M_{p,f}(r,0)$ 随 r 而增加.

从命题 1 容易看出，$M_{p,f}(r,r;x,y)$ 随 r 增加.

对于 $(r-s)(x-y)\neq 0$，类似于上述论证得到下列式子

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}(\ln M_{p,f}(r,s))&=\frac{1}{(s-r)^2}\left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}(s-r)-\ln\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)}\right)\\&=\frac{1}{(s-r)^2}\left(\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}(s-r)-\frac{\varphi'(\gamma)}{\varphi(\gamma)}(s-r)\right)>0,\end{aligned} \tag{14}$$

这里 γ 介于 r 和 s 间. 于是，$M_{p,f}(r,s)$ 为 r 和 s 的递增函数，因为有 $M_{p,f}(r,s)=M_{p,f}(s,r)$. 这样就完成了定理 3 的证明.

定理 4 假设 $p(u)\neq 0$ 是连续非负的函数，$f(u)$ 是正的递增(或递减)且连续的函数，那么 $M_{p,f}(r,s;x,y)$ 随 x 或 y 递增(或递减).

证明 简单的计算得到

$$\frac{\partial(\ln M_{p,f}(0,0;x,y))}{\partial y}=\frac{p(y)}{\varphi^2(0;x,y)}\left[(\ln f(y))\int_x^y p(u)\mathrm{d}u-\int_x^y p(u)\ln f(u)\mathrm{d}u\right], \tag{15}$$

$$\frac{\partial(M_{p,f}^r(r,0;x,y))}{\partial y}=\frac{p(y)}{\varphi^2(0;x,y)}\left[(f^r(y))\int_x^y p(u)\mathrm{d}u-\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u\right], \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln(M_{p,f}(r,r;x,y))}{\partial y}=\frac{p(y)f^r(y)}{\varphi^2(r;x,y)}\Big[&(\ln f(y))\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u-\\&\int_x^y p(u)f^r(u)\ln f(u)\mathrm{d}u\Big],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{\partial(M_{p,f}^{s-r}(r,s;x,y))}{\partial y}=\frac{p(y)f^{r+s}(y)}{\varphi^2(r;x,y)}\left[\frac{\int_x^y p(u)f^r(u)\mathrm{d}u}{f^r(y)}-\frac{\int_x^y p(u)f^s(u)\mathrm{d}u}{f^s(y)}\right], \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\int_x^y p(u)f^t(u)\mathrm{d}u}{f^t(y)}\right)=\frac{1}{f^t(y)}\left[\int_x^y p(u)f^t(u)\ln f(u)\mathrm{d}u-\ln f(y)\int_x^y p(u)f^t(u)\mathrm{d}u\right]. \tag{19}$$

由此知道,如果 $f(u)$ 递增(或递减),那么

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial(M_{p,f}^{s-r}(r,s;x,y))}{\partial y}\right)=\operatorname{sgn}(s-r) \quad (或 \operatorname{sgn}(r-s)), \tag{20}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial(M_{p,f}^{r}(r,0;x,y))}{\partial y}\right)=\operatorname{sgn} r \quad (或 \operatorname{sgn}(-r)), \tag{21}$$

$$\frac{\partial \ln(M_{p,f}(r,r;x,y))}{\partial y}\geqslant 0 \quad (或 \leqslant 0), \tag{22}$$

$$\frac{\partial \ln(M_{p,f}(0,0;x,y))}{\partial y}\geqslant 0 \quad (或 \leqslant 0). \tag{23}$$

因此,所证定理 4 是成立的.

定理 5 假设 $p_1(u)\not\equiv 0$ 与 $p_2(u)\not\equiv 0$ 在区间 $[x,y]$ 上非负可积, $f(u)$ 是正的可积函数, $p_1(u)/p_2(u)$ 为可积的, $p_1(u)/p_2(u)$ 和 $f(u)$ 都递增或都递减. 则

$$M_{p_1,f}(r,s;x,y)\geqslant M_{p_2,f}(r,s;x,y); \tag{24}$$

如果 $f(u)$ 或 $p_1(u)/p_2(u)$ 中一个递增另一个递减,那么不等式(18)反向成立.

证明 将函数 $f^s(u)p_2(u)$, $f^{r-s}(u)$, $p_1(u)/p_2(u)$ 应用于 Tchebycheff 积分不等式中,经过简单的计算可以得到(24)式. □

定理 6 设在区间 $[x,y]$ 上 $p(u)\not\equiv 0$ 为非负可积的, $f_1(u)$ 和 $f_2(u)$ 为正的可积函数. 如果 $f_1(u)/f_2(u)$ 和 $f_2(u)$ 是可积的且同时单增或同时单减,那么不等式

$$M_{p,f_1}(r,s;x,y)\geqslant M_{p,f_2}(r,s;x,y) \tag{25}$$

对于 $r,s\geqslant 0$ 或 $r\geqslant 0\geqslant s$ 和 $f_1(u)/f_2(u)\geqslant 1$ 成立. 不等式(25) 对于 $r,s\leqslant 0$ 或 $s\geqslant 0\geqslant r$, 和 $f_1(u)/f_2(u)\leqslant 1$ 反向成立.

如果 $f_2(u)$ 和 $f_1(u)/f_2(u)$ 中一个非增加,另一个非减少,那么对于 $r,s\geqslant 0$ 或 $s\geqslant 0\geqslant r$, 和 $f_1(u)/f_2(u)\geqslant 1$,不等式(25) 成立;对于 r, $s\geqslant 0$ 或 $r\geqslant 0\geqslant s$,和 $f_1(u)/f_2(u)\leqslant 1$,不等式(25) 反向成立.

证明 将函数 $p(u)f_2^s(u)$, $(f_1(u)/f_2(u))^r$, $f_2^{s-r}(u)$ 代入 Tchebycheff 积分不等式中,再直接计算就得到定理 6. □

4 简单的应用

作为双参数广义加权平均的简单应用,给出

命题 2 对于特殊的函数 $p(u)$ 和 $f(u)$,有

(1) 取 $p(u)\equiv 1$, $f(u)\equiv u$ 及 $x,y>0$,那么

$$M_{p,f}(0,0;x,y)=e^{-1}(y^y/x^x)^{1/(y-x)} \quad (指数平均); \tag{26}$$

$$M_{p,f}(r,0;x,y)=\left(\frac{1}{r+1}\frac{y^{r+1}-x^{r+1}}{y-x}\right)^{1/r} \quad 广义对数平均); \tag{27}$$

$$M_{p,f}(r-1,r-1;x,y)=e^{-1/r}(y^{y^r}/x^{x^r})^{1/(y^r-x^r)} \quad (恒等平均); \tag{28}$$

$$M_{p,f}(r-1,s-1;x,y)=\left[\frac{r}{s}\frac{y^s-x^s}{y^r-x^r}\right]^{1/(s-r)} \quad (双参数拓广平均) \tag{29}$$

都是 r 和 s 或者 x 和 y 的单调递增函数.

(2) 取 $p(u)=f'(u)$，$f(u)$为正的单调函数,那么

$$M_{p,f}(0,0;x,y) = e^{-1}\{[f(y)]^{f(y)}/[f(x)]^{f(x)}\}^{1/[f(y)-f(x)]}; \tag{30}$$

$$M_{p,f}(r,0;x,y) = (\frac{1}{r+1}\frac{f^{r+1}(y)-f^{r+1}(x)}{f(y)-f(x)})^{1/r}; \tag{31}$$

$$M_{p,f}(r-1,r-1;x,y) = e^{-1/r}\{[f(y)]^{f^r(y)}/[f(x)]^{f^r(x)}\}^{1/[f^r(y)-f^r(x)]}; \tag{32}$$

$$M_{p,f}(r-1,s-1;x,y) = [\frac{r}{s}\frac{f^s(y)-f^s(x)}{f^r(y)-f^r(x)}]^{1/(s-r)} \tag{33}$$

都是 r 和 s 的增加函数,而且关于 x 和 y 具有与 $f(u)$相同的单调性.

命题 3　设 $f(u)$是区间$[a,b]$上的具有任意阶导数的正函数,定义 $\psi(t)$为

$$\psi(t) = [f^t(b) - f^t(a)]/t, \quad t\neq 0; \qquad \psi(0) = \ln f(b) - \ln f(a), \tag{34}$$

定义 $U_n(t,s)$为

$$U_0(t,s) = s^t, \quad t\partial U_n(t,s)/\partial t - (n+1)U_n(t,s) = U_{n+1}(t,s), \tag{35}$$

其中 $n\in N$, $s\in[a,b]$. 那么

$$\psi^{(n)}(t) = (U_n(t,f(b)) - U_n(t,f(a)))/t^{n+1}, \tag{36}$$

$$\partial U_n(t,s)/\partial t = t^{n+1}(\ln s)^n s^{t-1}. \tag{37}$$

证明　利用(35)式并直接计算容易地得到

$$\psi^{(n+1)}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi^{(n)}(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{U_n(t,f(b))-U_n(t;f(a))}{t^{n+1}})$$

$$=\frac{[t\partial U_n(t,f(b))/\partial t-(n+1)U_n(t,f(b))]-[t\partial U_n(t,f(a))/\partial t-(n+1)U_n(t,f(a))]}{t^{n+2}}$$

$$=\frac{U_{n+1}(t;f(b))-U_{n+1}(t;f(a))}{t^{n+2}}.$$

对 n 使用数学归纳法,可证明(36)是成立的.

对(35)式的两边关于 s 进行微分得到

$$\partial U_{n+1}/\partial s=t\partial^2 U_n/\partial t\partial s-(n+1)\partial U_n/\partial s=t\partial(\partial U_n/\partial s)/\partial t-(n+1)\partial U_n/\partial s.$$

再次对 n 使用数学归纳法,方程(37)就得到了证明.

实际上,在(35)式两边和区间$[a,b]$上积分并利用下列公式

$$\psi(t)=\int_a^b f^{t-1}(u)f'(u)\mathrm{d}u, \tag{38}$$

$$\psi^{(n)}(t)=\int_a^b f^{t-1}(u)f'(u)[\ln f(u)]^n\mathrm{d}u \tag{39}$$

可以容易地得到(36)式. 这就完成了命题 3 的证明.

命题 4　如果 $f(u)\geqslant 1, f'(u)\geqslant 0$,那么函数 $\psi(t) = [f^t(b) - f^t(a)]/t$, $t\neq 0$; $\psi(0) = \ln f(b) - \ln f(a)$ 是$(-\infty, +\infty)$上的绝对和正则单调的函数. 如果 $0 < f(u) \leqslant 1, f'(u)\geqslant 0$,那么 $\psi(t)$ 在$(-\infty, +\infty)$上是完全和正则单调的. 同时,$\psi(t)$ 是区间$(-\infty, +\infty)$上的绝对凸函数.

注记　关于绝对(完全,正则)单调函数和绝对凸函数的性质与不等式,已经在文献[13,14]中做了一定的综述,在[24,25]中也有一些讨论.

参考文献：

[1] ALZER H. *On Stolarsky's mean value family* [J]. Intern. J. Math. Educat. Sci. Tech., 1988, **20**(1): 186—189.

[2] BECKENBACH E F and BELLMAN R. *Inequalities* [M]. Springer, Berlin, 1983.

[3] CARLSON B C. *The logarithmic mean* [J]. Amer. Math. Monthly, 1972, **79**: 615—618.

[4] 陈 计，舒海斌. 关于 *Ostle-Terwilliger* 不等式的加细 [J]. 数学通讯，1988，**3**：7—8.
CHEN Ji, SHU Hai-bin. *On refinement of Ostle-Terwilliger's inequality* [J]. Shuxue Tongxun, 1988, **3**: 7—8.

[5] CISBANI R. *Contributi alla teoria delle medie I* [J]. Metron 1938, **13**(2): 23—34.

[6] GALVANI L. *Dei limiti a cui tendono alcune media* [J]. Boll. Un. Mat. Ital., 1927, **6**: 173—179.

[7] 郭白妮，张士勤，祁 锋. 双参数拓广平均单调性的一个简单证明 [J]. 数学的实践与认识，1999，**29**(2)：97—102.
GUO Bai-ni, ZHANG Shi-Qin and QI Feng. *Elementary proofs of monotonicity for extended mean values of some functions with two parameters* [J]. Mathematics in Practice and Theory, 1999, **29**(2): 169—174.

[8] HARDY G H, LITTLEWOOD J E and P'olya G. *Inequalities* [M]. 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[9] 匡继昌. 常用不等式(第二版) [M]. 长沙：湖南教育出版社，1993.
KUANG Ji-chang. *Applied Inequalities* [M]. 2nd edition, Hunan Education Press, Changsha, China, 1993.

[10] LEACH E and SHOLANDER M. *Extended mean values* [J]. Amer. Math. Monthly, 1978, **85**: 84—90.

[11] LEACH E, SHOLANDER M. *Extended mean values II* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1983, **92**: 207—223.

[12] LIN Tung-po. *The power mean and the logarithmic mean* [J]. Amer. Math. Monthly, 1974, **81**: 879—883.

[13] MITRINOVIC D S. *Analytic Inequalities* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[14] MITRINOVIC D S, PECARIC J E and FINK A M. *Classical and New Inequalities in Analysis* [M]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[15] PALES Z. *Inequalities for differences of powers* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1988, **131**: 271—281.

[16] PEČARIC J, QI Feng, ŠIMIC V, et al. *Refinements and extensions of an inequality, III* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **227**(2): 439—448.

[17] POLYA G, SZEGÖ G. *Problems and Theorems in Analysis* [M]. Vol. 1, Springer, Berlin, 1972.

[18] QI Feng. *Generalized weighted mean values with two parameters* [J]. Proc. Roy. Soc. London A, 1998, **454**(1978): 2723—2732.

[19] QI Feng. *On a twoobreakdash-parameter family of nonhomogeneous mean values* [J]. Tamkang Journal of Mathematics, 1998, **29**(2): 155—163.

[20] QI Feng, LUO Qiu-ming. *A simple proof of monotonicity for extended mean values* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **224**: 356—359.

[21] QI Feng, LUO Qiu-ming. *Refinements and extensions of an inequality* [J]. Mathematics and Informatics Quarterly, 1999, **9**(1): 23—25.

[22] QI Feng, MEI Jia-qiang, XIA Da-feng. et al. *New proof of weighted power mean inequalities and monotonicity for generalized weighted mean values* [J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2000, **3**(3): in the press.

[23] QI Feng, MEI Jia-qiang, XU Sen-lin. *Other proofs of monotonicity for generalized weighted mean values* [C]. RGMIA Research Report Collection, 1999, **2**(4): 6.

[24] QI Feng, XU Sen-lin. *Refinements and extensions of an inequality II* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, **211**: 616—620.

[25] QI Feng, XU Sen-lin. *The function $(b^x-a^x)/x$: Inequalities and properties* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, **126**(11): 3355—3359.

[26] QI Feng, XU Sen-lin and DEBNATH L. *A new proof of monotonicity for extended mean values* [J]. Intern. J. Math. Math. Sci., 1999, **22**(2): 415—420.

[27] QI Feng, ZHANG Shi-qin. *Note on monotonicity of generalized weighted mean values* [J]. Proc. Roy. Soc. London Series A, 1999, **455**: , in press.

[28] 祁 锋. 几何拓扑中的若干问题与加权抽象平均的研究 [D]. 中国科学技术大学博士毕业论文，合肥，1998 年.
QI Feng. *Studies on Problems in Topology and Geometry and on Generalized Weighted Abstracted Mean Values* [D]. Thesissubmitted for the degree of Doctor of Philosophy at University of Science and Technology of China, Hefei City, Anhui Province, China, Winter 1998.

[29] STOLARSKY K B. *Generalizations of the logarithmic mean* [J]. Mag. Math., 1975, **48**: 87—92.

[30] TOADER G H. *Mean value theorems and means* [M]. First Conf. Appl. Math. Mech., Cluj—Napoca, 1988.

[31] TOADER G H. *A generalization of geometric or harmonic means* [J]. 'Babes—Bolyai' Univ. Fac. Math. Phys. Res. Math. Anal., 1989, **2**: 21—28.

[32] TOBEY M D. *A two-parameter homogeneous mean value* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**: 9—14.

[33] YANG Ren-er, CAO Dong-ji. *Generalization of the logarithmic mean* [J]. J. of Ningbo Univ., 1989, **2**(2): 105—108.

Generalized Weighted Mean Values with Two Parameters and Its Monotonicity

GUO Bai-ni, QI Feng

(Dept. of Fundamental Courses, Jiaozuo Institute of Technology, Henan 454000)

Abstract: In the article, the generalized weighted mean values with two parameters were defined, their basic properties and monotonicities were investigated.

Key words: generalized weighted mean value; parameter; basic property; monotonicity; Tchebycheff integral inequality.