第21卷第1期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 1
2001年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2001

具有跟踪性可扩流的基本集*

卢占会[1]， 王福海[1]， 郑宏文[2]
(1. 华北电力大学基础科学系，河北 保定 071003；2. 河北师范大学数学系，河北 石家庄 050016)

摘 要：本文研究了具有跟踪性可扩流的谱分解中基本集的整体性质，其中包括稳定集和不稳定集的性质、无环性及汇和源的存在性.

关键词：连续流；跟踪性；可扩性；基本集.
分类号：AMS(1991) 58F25,54H20/CLC O193
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0112-05

1 引 言

在微分动力系统结构稳定性的研究中，公理A系统具有主导作用. 人们在获得了公理A系统的谱分解定理的同时，也对谱分解定理中基本集的稳定集与不稳定集、无环条件等整体行为取得了系列的成果，这些成果在其Ω稳定性的研究中发挥出不容忽视的关键作用. 根据公理A系统在其非游荡集上具有跟踪性与可扩性两个重要的动力性质，近年来，人们对紧致度量空间上具有这两种性质的系统进行了许多研究，例如[1]－[4]. 所得结果说明，这类系统在许多重要的拓扑性质上与公理A系统是相同的，例如它们也有谱分解定理([2]). 近来，文[1]对同胚的谱分解的基本集之整体性质给出了系统阐述. 本文试图对具有跟踪性的可扩流研究与[1]中同胚相对应的内容，这包含基本集的稳定集与不稳定集的性质，基本集的无环性及汇和源的存在性，在论述中还指出了[1]中一个定理证明的不当之处.

这里指出，由于同胚是可扩的或具有跟踪性等价于它的扭扩流有对应的性质，因此，通过扭扩可以看到，本文所获得结果可视为是[1]同胚情形所得到相应结果的推广.

2 有关定义及已知结果

本文恒设(X,d)是紧致度量空间，$\varphi:R\times X\to X$为连续流，记为(X,φ).

用$\omega(x)$(resp. $\alpha(x)$)，$\mathrm{Per}(\varphi)$和$\Omega(\varphi)$分别表示φ过x轨道的ω极限集(resp. α极限集)，φ

---

* 收稿日期：1998-04-20；修订日期：1999-11-30
基金项目：国家自然科学基金和华北电力大学青年教师科研基金资助项目.
作者简介：卢占会(1964-)，男，硕士，华北电力大学副教授.
E-mail：JB2wq@263.net

的周期点集和非游荡集.

记 $C(R)=\{\sigma|\sigma:R\to R$ 为连续映射,且 $\sigma(0)=0\}$;$H(R)=\{\sigma\in C(R)|\sigma$ 为保向同胚$\}$;

$$\mathrm{Rep}(\varepsilon)=\{\sigma\in H(R)||\frac{\sigma(s)-\sigma(t)}{s-t}-1|\leqslant\varepsilon,t\neq s\},(\varepsilon>0).$$

定义 2.1 给定 $\delta>0,T>0$,点列$(\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty},\{t_i\}_{-\infty}^{+\infty})$称为 φ 的一个(δ,T)伪轨,若 $t_i\geqslant T$,且 $d(\varphi(t_i,x_i),x_{i+1})\leqslant\delta(\forall\ i\in Z)$. 特别地,$(\delta,T)$伪轨的任意有限段$(\{x_i\}_a^{b+1},\{t_i\}_a^b)(a<b)$称为是从 x_a 到 x_{b+1} 的(δ,T)链.

现对正实数列 $\{t_i\}_{-\infty}^{+\infty}$,记 $s_0=0,s_n=\sum_{i=0}^{n-1}t_i,s_{-n}=\sum_{i=-n}^{-1}t_i$.

定义 2.2[3] 给定 $\varepsilon>0$,称(δ,T)伪轨$(\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty},\{t_i\}_{-\infty}^{+\infty})$可被过点 y 的轨道 ε 跟踪(resp. 强跟踪),若存在 $\sigma\in H(R)$(resp. $\sigma\in\mathrm{Rep}(\varepsilon)$)使得:

$$d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t-s_n,x_n))<\varepsilon,t\geqslant 0,s_n\leqslant t\leqslant s_{n+1},n=0,1,2,\cdots.$$

$$d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t+s_{-n},x_{-n}))<\varepsilon,t\leqslant 0,-s_{-n}\leqslant t\leqslant -s_{-n+1},n=1,2,\cdots.$$

φ 称为关于 $T>0$ 有跟踪性(resp. 强跟踪性),若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使得每个(δ,T)伪轨可被 ε 跟踪(resp. ε 强跟踪).

注 2.3 据[3],在论及 φ 跟踪时,可以只考虑$(\delta,1)$伪轨$(\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty},\{t_i\}_{-\infty}^{+\infty})$,$(1\leqslant t_i<2,\forall\ i\in Z)$.

记 $CR(\varphi)=\{x\in X|$ 对任意 $\delta>0,T>0$,存在从 x 到 x 的(δ,T)链$\}$,称 $CR(\varphi)$ 为 φ 的链回归集.

命题 2.4[2] 若(X,φ)有跟踪性,则 $\Omega(\varphi)=CR(\varphi)$.

由命题 2.4 及 $CR(\varphi|_{CR(\varphi)})=CR(\varphi)$ 立即可得:

推论 2.5 若$(CR(\varphi),\varphi)$有跟踪性,则 $\Omega(\varphi)=CR(\varphi)$.

定义 2.6[4] φ 称为可扩的,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对任意点对 $x,y\in X$,及一个 $\sigma\in C(R)$ 有 $d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t,x))<\delta\ (\forall\ t\in R)$,则 $y=\varphi(\bar{t},x)$(对某 $\bar{t}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$). δ 称为相对于 ε 的可扩常数.

注 2.7 据[4],若 φ 可扩,则 φ 的不动点均孤立,进而由 X 紧致可知 φ 仅有有限个不动点,且都是孤立的. 据此,以下凡涉及到 φ 可扩时,均设其无不动点.

定理[2](谱分解定理) 设$(\Omega(\varphi),\varphi|_{\Omega(\varphi)})$是有跟踪性的可扩流,则 $\Omega(\varphi)$ 可表示为 φ 的有限个互不相交的闭不变集之并:$\Omega(\varphi)=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_l$ 使得$(R_i,\varphi|_{R_i})$是拓扑传递的.

把谱分解定理中的 $R_i(i=1,2,\cdots,l)$ 称为是 φ 的基本集.

注 2.8 据推论 2.5,若在谱分解定理中以 $CR(\varphi)$ 代替 $\Omega(\varphi)$,该定理依然成立. 以下凡涉及到谱分解定理时,均对 $CR(\varphi)$ 而言.

3 基本集的稳定集和不稳定集

定义 3.1 对 $x\in X$ 及子集 $A\subset X$,记

$W^s(x)=\{y\in X|\exists\ \sigma\in H(R)$ 使得 $d(\varphi(\sigma(t),x),\varphi(t,y))\to 0(t\to+\infty)\}$.

$W^s(A)=\bigcup_{x\in A}W^s(x)$.

它们分别称为 x 的稳定集和 A 的稳定集. 类似地定义 x 的不稳定集 $W^u(x)$ 和 A 的不稳定集 $W^u(A)$.

引理 3.2[2] 设 (X,φ) 是可扩流, $\delta=\delta(\varepsilon)$ 是可扩常数, 若对 $x,y\in X$ 及 $\sigma\in Rep(\varepsilon)$, 有 $d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t,x))\leqslant\delta(\forall\ t\geqslant 0)$, 则对任意 $\gamma>0$ 存在 $N>0$, 使得

$$d(\varphi(\sigma(t),z),\varphi(t,x))\leqslant\gamma\quad(\forall\ t\geqslant N, z\in\varphi([-\varepsilon,\varepsilon],y)).$$

定理 3.3 设 $(CR(\varphi),\varphi|_{CR(\varphi)})$ 是有跟踪性的可扩流, R_i 是任一基本集, 则

(1) $W^s(R_i)=\{x\in X\,|\,d(\varphi(t,x),R_i)\to 0(t\to+\infty)\}$;

(2) $W^u(R_i)=\{x\in X\,|\,d(\varphi(t,x),R_i)\to 0(t\to-\infty)\}$;

(3) $\overline{W^s(x)\cap R_i}=R_i(\forall\ x\in R_i)$;

(4) $\overline{W^u(x)\cap R_i}=R_i(\forall\ x\in R_i)$.

证明 只证(1)、(3). 先证(1).

由于 R_i 中不含不动点, φ 在 R_i 上有跟踪性, 故由[2]定理4知 φ 在 R_i 上有强跟踪性, 设 δ 是相对于 $\eta>0$ 的可扩常数. 对 $0<\beta<\delta/2$, 由强跟踪性取定 $\alpha>0$, 再由 φ 在 $[0,2]\times X$ 上的一致连续性, 取 $0<\gamma<\min(\alpha/2,\delta/2)$, 使得对任意 $x,y\in X$, 当 $d(x,y)<\gamma$ 及 $t\in[0,2]$ 时有

$$d(\varphi(t,x),\varphi(t,y))<\min(\alpha/2,\delta/2).$$

设 $x\in X$ 满足 $d(\varphi(t,x),R_i)\to 0(t\to+\infty)$, 取 N 充分大使得 $t\geqslant N$ 时有

$$d(\varphi(t,x),R_i)<\gamma.$$

取实数列 $\{t_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 满足: $t_0=N, 1\leqslant t_{n+1}-t_n<2(\forall\ n\in Z)$. 对任意 $n\geqslant 0$, 取 $x_n\in R_i$, 使得

$$d(\varphi(t_n,x),x_n))<\gamma.$$

由此可知 $d(\varphi(t_{n+1}-t_n,x_n),x_{n+1})<\alpha(\forall\ n\geqslant 0)$. 令 $x_n=\varphi(t_n-N,x_0)(\forall\ n\leqslant -1)$, 并记 $\tau_n=t_{n+1}-t_n(\forall\ n\in Z)$, 那么 $(\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty},\{\tau_n\}_{-\infty}^{+\infty})$ 是 $(\alpha,1)$ 伪轨. 因而存在 $y\in R_i$ 及 $\sigma\in\mathrm{Rep}(\beta)$ 使得

$$d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t-s_n,x_n))<\beta, s_n\leqslant t\leqslant s_{n+1}, n=0,1,2,\cdots.$$

注意到 $s_n=t_n-N(\forall\ n\geqslant 1)$ 及 $d(\varphi(t-(t_n-N),x_n),\varphi(t+N,y))<\delta/2, s_n\leqslant t\leqslant s_{n+1}$, $n=0,1,2,\cdots$. 则有 $d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t,\varphi(N,x)))<\beta+\delta/2<\delta\ (\forall\ t\geqslant 0)$. 从而, 由引理 3.2 知 $\varphi(N,x)\in W^s(y)$. 进而由 $W^s(x)$ 的不变性有 $x\in W^s(y)\subset W^s(R_i)$. 这就证明了(1).

(3) 的证明 设 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 为可扩常数. 对任意 $x\in R_i$ 及任意 $z\in R_i$ 和 $0<\beta<\delta$, 要证 $W^s(x)\cap B(z,\beta)\neq\varnothing$. 事实上, 对 $\beta/2>0$, 设 $\alpha>0$ 是由强跟踪性决定的数, 由于 φ 在 R_i 上有一条稠密的轨道, 故存在 $w\in R_i$ 及 $t'>2$ 使得 $\max\{d(w,z),d(\varphi(w,t'),x)\}<\min(\beta/2,\alpha)$, 于是在轨弧 $\varphi((-\infty,0],z)\cup\varphi([0,t'],w)\cup\varphi([0,\infty),x)$ 上构造一个从 x 出发的 $(\alpha,1)$ 伪轨, 且因此存在 $y\in R_i$ 及 $\sigma\in\mathrm{Rep}(\beta/2)$ 使得 $d(\varphi(t,x),\varphi(\sigma(t),y))<\beta/2<\delta\ (\forall\ t\geqslant 0)$. 由引理 3.2 知 $y\in W^s(x)$, 又因存在 $t''\leqslant 0$ 使得 $d(\varphi(t'',y),w)<\beta/2$, 从而 $d(z,\varphi(t'',y))<\beta$, 由 $W^s(x)$ 的不变性知 $\varphi(t'',y)\in W^s(x)$, 故 $W^s(x)\cap B(z,\beta)\neq\varnothing$.

命题 3.4 设 $(CR(\varphi),\varphi|_{CR(\varphi)})$ 有跟踪性的可扩流, $CR(\varphi)$ 的谱分解为 $CR(\varphi)=\bigcup_{i=1}^{l}R_i$, 则

(1) 对 $\forall\ x\in X$, $\exists\ R_i,R_j$ 使得

$$d(\varphi(t,x),R_i)\to 0(t\to+\infty), d(\varphi(t,x),R_j)\to 0(t\to-\infty);$$

(2) $X=\bigcup_{i=1}^{l}W^\tau(R_i)$, $(\tau=s$ 或 $u)$;

(3) 若 $i \neq j$，则 $W^\tau(R_i) \cap W^\tau(R_j) = \varnothing$，($\tau = s$ 或 u).

证明 只证明(1).

由推论 2.5 知 $CR(\varphi) = \Omega(\varphi)$，从而对任意 $x \in X$，有 $\omega(x) \subset CR(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{l} R_i$. 由 $\omega(x)$ 的连通性知存在 R_i 使 $\omega(x) \subset R_i$，以下证明 $d(\varphi(t,x), R_i) \to 0 (t \to +\infty)$. 若不然，就存在 $\epsilon_0 > 0$ 和无限递增且趋向于 ∞ 的序列 $\{t_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 使 $d(\varphi(t_n, y), R_i) \geqslant \epsilon_0$，对 $\varphi(t_n, y)$ 的某极限点 z 有 $d(z, R_i) \geqslant \epsilon_0$. 但是 $z \in \omega(x) \subset R_i$，矛盾，从而结论得证. 另外情况类似可证.

4 基本集的无环性及汇和源的存在性

定义 4.1 设 $\Lambda_i (i = 1,2,\cdots,l)$ 是 φ 的互不相交的闭不变集，定义关系“$\succ$”为：

$$\Lambda_i \succ \Lambda_j \Leftrightarrow (W^u(\Lambda_i) \backslash \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) \backslash \Lambda_j) \neq \varnothing.$$

称 $\Lambda_i (i = 1,2,\cdots,l)$ 是无环的，若不存在互不相同的 $i_1, i_2, \cdots, i_r (r \geqslant 1)$ 使得

$$\Lambda_{i_1} \succ \Lambda_{i_2} \succ \cdots \succ \Lambda_{i_r} \succ \Lambda_{i_1}.$$

定义 4.2 设 R_i 是一基本集，若 $W^s(R_i)$ (resp. $W^u(R_i)$) 是 R_i 的邻域，则称 R_i 是汇(resp. 源).

定理 4.3 设$(CR(\varphi), \varphi|_{CR(\varphi)})$是有跟踪性的可扩流，$CR(\varphi)$ 的谱分解为 $CR(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{l} R_i$，则 $R_i (i = 1,2,\cdots,l)$ 是无环的.

证明 只需证不存在$\{R_{i_j}\}$ 使 $R_{i_1} \succ R_{i_2} \succ \cdots \succ R_{i_r} \succ R_{i_1}$. 若特别地存在某 i 使 $R_i \succ R_i$，则存在 $x, y \in R_i, z \in X \backslash CR(\varphi)$ 满足 $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$. 于是对任意 $\delta > 0$ 及 $T > 0$，存在 $t > 2T$ 及 $t', t'' \in R$ 使得

$$d(\varphi(t', x), \varphi(-t, z)) < \delta/2. \tag{4.1}$$

$$d(\varphi(t'', y), \varphi(t, z)) < \delta/2. \tag{4.2}$$

由于 $(R_i, \varphi|_{R_i})$ 是拓扑传递的，因此在 R_i 中存在 φ 的一条稠密的轨道，设它是过 w 的轨道，于是存在 $t_1, t_2 \in R$ 使得 $d(\varphi(t', x), \varphi(t_1, w)) < \delta/2$ 且 $d(\varphi(t'', y), \varphi(t_2, w)) < \delta/2$. 可设 $t_2 - t_1 > 2T$. 结合(4.1)和(4.2)式，有 $d(\varphi(-t, z), \varphi(t_1, w)) < \delta$ 且 $d(\varphi(t, z), \varphi(t_2, w)) < \delta$. 易见，在轨弧 $\varphi([-t, t], z)$ 及 $\varphi([t_1, t_2], w)$ 上可构造出一个从 z 到 z 的(δ, T)链，这表明 $z \in R_i$，矛盾. 对一般情况类似可证.

注 4.4 这里指出，[1] 中定理 3.2.3 证明中所构造的伪轨未能保证在链回归集中，从而其证明不能成立，但可用定理 4.3 的类似证明得到.

命题 4.5 设(X, φ)是有跟踪性的可扩流，R_i 是一基本集，则 R_i 是汇(resp. 源) 当且仅当 $W^u(R_i) = R_i$(resp. $W^s(R_i) = R_i$).

证明 “$\Rightarrow$” 取 $\epsilon > 0$ 使得 $B(R_i, \epsilon) \subset W^s(R_i)$. 若 $z \in W^u(R_i) \backslash R_i \neq \varnothing$. 由定理 3.3，存在 $T < 0$ 使得 $\varphi(T, z) \in W^u(R_i) \cap B(R_i, \epsilon) \subset W^s(R_i)$，由 R_i 的不变性知 $\varphi(T, z) \notin R_i$，从而 $\varphi(T, z) \in (W^u(R_i) \backslash R_i) \cap (W^s(R_i) \backslash R_i)$，即 $R_i \succ R_i$. 这与定理 4.3 矛盾.

“$\Leftarrow$” 取 $\beta > 0$ 使得$\overline{B(R_j, \beta)} \cap \overline{B(R_k, \beta)} = \varnothing (j \neq k)$. 对 $\beta > 0$ 设 $\alpha > 0$ 是由跟踪性决定的数. 若结论不对，则存在 $y \in B(R_i, \alpha/2) \backslash W^s(R_i)$. 由命题 3.4，设 $\omega(y) \subset R_j (i \neq j)$. 取 $z \in R_i$

使得$d(y,z)<\alpha$.于是可在轨弧$\varphi((-\infty,0],z)$与$\varphi([0,\infty),y)$上构造以y为起点的$(\alpha,1)$伪轨,因此存在$x\in X$及$\sigma\in H(R)$使得$d(\varphi(t,x),\varphi(\sigma(t),y))<\beta\ (\forall\, t\geqslant 0)$.由$\omega(y)\subset R_j$得$\omega(x)\subset\overline{B(R_j,\beta)}$,再由$\beta$的选取可知$\omega(x)\subset R_j$.类似地有$\alpha(x)\subset R_i$.由$R_i\neq R_j$及$R_i$的不变性,并利用定理3.3知$x\in W^u(R_i)\backslash R_i\neq\varnothing$,矛盾.

定理4.6 设(X,φ)是有跟踪性的可扩流,则φ有汇和源.

证明 只证φ有汇.设$CR(\varphi)$的谱分解为$CR(\varphi)=\bigcup_{i=1}^{l}R_i$.不妨设$z_0\in X\backslash\bigcup_{i=1}^{l}R_i\neq\varnothing$.据命题3.4,存在$R_{i_1}$使得$\omega(z_0)\subset R_{i_1}$,由无环知,$\alpha(z_0)\not\subset R_{i_1}$.若$W^u(R_{i_1})=R_{i_1}$,则由命题4.5知,$R_{i_1}$为汇.否则,存在$z_1\in X\backslash\bigcup_{i=1}^{l}R_i$使得$\alpha(z_1)\subset R_{i_1}$.再由无环性知,$\omega(z_1)\not\subset R_{i_1}$.因此,存在$i_2$使得$\omega(z_1)\subset R_{i_2}$且$i_1\neq i_2$.重复上述做法,那么必经有限步($k$步)而终止.这样就得到$k-1$个互不相同的点$\{z_1,z_2,\cdots,z_{k-1}\}\subset X\backslash\bigcup_{i=1}^{l}R_i$以及$k$个基本集$R_{i_1},\cdots,R_{i_k}$,它们满足$\alpha(z_j)\subset R_{i_j}$,$\omega(z_j)\subset R_{i_{j+1}}(i=1,2,\cdots,k-1)$,我们说$R_{i_k}$是一个汇.否则,上述做法将可以再做下去,这与到第$k$步终止将产生矛盾.

致谢 作者谨对何连法教授的关怀和鼓励表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] AOKI N, HIRAIDE K. *Topological Theory of Dynamical Systems* [M]. North-Holland Amsterdam, 1994, 96—117.

[2] KOMURO M. *One-parameter flows with the pseudo orbit tracing* [J]. Mh. Math., 1984, **98**: 219—253.

[3] THOMAS R. *Stability properties of one parameter flows* [J]. Proc. London. Math. Soc., 1982, **45** (3): 479—505.

[4] BOWEN R, WALTERS P. *Expansive one-parameter flow* [J]. J. Diff. Equ., 1972, **12**: 180—193.

Basic Sets of Expansive Flows with the Shadowing Property

LU Zhan-hui[1], WANG Fu-hai[1], ZHENG Hong-wen[2]

(1. Dept. of Basic Science, North China Electric Power University, Baoding 071003, China;

2. Dept. of Math., Hebei Teachers' University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: For expansive flows with the shadowing property, we have studied the entire properties of basic sets in its spectral decomposition, including the properties of stable and unstable sets, no cycles property and existence of sink and source.

Key words: continuous flows; shadowing property; expansive; basic sets.