第21卷第1期 2001年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 1 Feb. 2001

用线性弱正算子逼近*

曹家鼎
(复旦大学数学系，上海 200433)

摘　要：用线性正算子的逼近理论飞速发展，但正性是一个较强的限制，孙永生，王仁宏等研究过减弱正性限制，作者研究用线性弱正算子逼近，推广 Korovkin 定理和 Grundmann 定理等等.

关键词：正算子；弱正算子；逼近理论.
分类号：AMS(1991) 41A35/CLC O174.4
文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0129-06

1　弱正算子

Korovkin 建立了用线性正泛函和线性正算子的逼近理论[1]，由于这理论的魅力，得到广泛地响应和引用，但正性是一个较强的限制. 王仁宏研究过拟局部正线性算子[2]. 在周期情况，孙永生引进过弱正核和弱正算子[3]. 本文在非周期情况研究用线性弱正算子逼近，推广 Korovkin 定理.

设 $C_{2\pi}$ 是周期为 2π 的连续函数集合. 设 $f(t)\in L_{2\pi}$，$L_n(f(t),x)\xlongequal{\text{def}}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)K_n(t)\mathrm{d}t$，其中核 $K_n(t)\in C_{2\pi}$，$K_n(-t)=K_n(t)$. 假使 $K_n(t)\geqslant 0$，则 $L_n(f,x)$ 是正线性算子；假使 $\int_{\delta}^{\pi}K_n(v)\mathrm{d}v\geqslant 0(0\leqslant\delta\leqslant\pi)$，则称 $K_n(v)$ 为弱正核，$L_n(f(t),x)$ 是周期弱正算子.

现在我们研究非周期情况的弱正算子，设逼近算子 $U_n(f(t),x)\xlongequal{\text{def}}\int_a^b f(t)K_n(t,x)\mathrm{d}t$，核 $K_n(t,x)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 和 $a\leqslant x\leqslant b$ 上二元可测，本文中总设当 n 及 x 固定时，$K_n(t,x)$ 是 t 的有界函数，所以 $U_n(f(t),x)$ 对任何 L 可积函数都有定义. 假使对 $t\in[a,b]$ 和 $x\in[a,b]$ $K_n(t,x)\geqslant 0$，则 $U_n(f(t),x)$ 是线性正算子：即对每一 $f(t)\in L$ 和 $f(t)\geqslant 0(t\in[a,b])$ 有 $U_n(f(t),x)\geqslant 0$ $(x\in[a,b])$. 设 $\lambda(t)=1(t\geqslant 0)$ 和 $\lambda(t)=0(t<0)$，设 $\mu(t)\xlongequal{\text{def}}1-\lambda(t)$，则 $\mu(t)=0(t\geqslant 0)$ 和 $\mu(t)=1(t<0)$，假使对特殊形式的函数 $\lambda(t-\xi)$ 和 $\mu(t-\xi)(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 有 $U_n(\lambda((t-\xi),x)\geqslant 0$ 和 $U_n(\mu(t-\xi),x)\geqslant 0(x\in[a,b])$，则称 U_n 是线性一阶弱正算子. 周期情况弱正核条件 $\int_{\xi}^{\pi}K_n(v)\mathrm{d}v\geqslant 0(0\leqslant\xi\leqslant\pi)$ 相当 $L_n(\lambda(t-\xi),0)\geqslant 0(0\leqslant\xi\leqslant\pi)$. 设 $t_+=$

* 收稿日期：1998-08-01
作者简介：曹家鼎(1940-)，男，复旦大学教授，美国纽约科学院院士.

$\max(t,0)$，假如对特殊形式的函数$(t-\xi)_+$和$(\xi-t)_+$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$有$U_n((t-\xi)_+,x)\geqslant 0$和$U_n((\xi-t)_+,x)\geqslant 0(x\in[a,b])$，则称$U_n$是线性二阶弱正算子.

$$U_n(\lambda(t-\xi),x)=\int_a^b\lambda(t-\xi)K_n(t,x)\mathrm{d}t=\int_\xi^b K_n(t,x)\mathrm{d}t,$$

$$U_n(\mu(t-\xi),x)=\int_a^b\mu(t-\xi)K_n(t,x)\mathrm{d}t=\int_a^\xi K_n(t,x)\mathrm{d}t.$$

因此一阶弱正算子的条件等价于对$\xi\in[a,b],x\in[a,b]$有$\int_\xi^b K_n(t,x)\mathrm{d}t\geqslant 0$和$\int_a^\xi K_n(t,x)\mathrm{d}t\geqslant 0$，假如$K_n(t,x)\geqslant 0$，此时$U_n$是线性正算子，它一定是一阶弱正算子.

现设U_n是二阶弱正算子，注意

$$U_n((t-\xi)_+,x)=\int_a^b\max(t-\xi,0)K_n(t,x)\mathrm{d}t=\int_\xi^b(t-\xi)K_n(t,x)\mathrm{d}t\geqslant 0,\qquad(1.1)$$

$$U_n((\xi-t)_+,x)=\int_a^b\max(\xi-t,0)K_n(t,x)\mathrm{d}t=\int_a^\xi(\xi-t)K_n(t,x)\mathrm{d}t\geqslant 0.\qquad(1.2)$$

因此二阶弱正算子的条件等价于(1.1)和(1.2). 用分部积分法

$$\int_z^b(t-z)K_n(t,x)\mathrm{d}t=-(t-z)\cdot\int_t^b K_n(\xi,x)\mathrm{d}\xi\Big|_{t=z}^{t=b}+\int_z^b\left(\int_t^b K_n(\xi,x)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_z^b\left(\int_t^b(K_n(\xi,x)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t,$$

类似地

$$\int_a^z(z-t)K_n(t,x)\mathrm{d}t=\int_a^z\left(\int_a^t(K_n(\xi,x)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t,$$

因此一阶弱正算子$U_n(f,x)$一定是二阶弱正算子.

2 Korovkin 定理的推广

设$g\in L[a,b]$，$\|g\|_1\stackrel{\text{def}}{=}\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t$. 设$AC[a,b]$是在$[a,b]$上绝对连续函数的集合. 如$f'(t)\in AC[a,b]$且$f''(t)\in L^p[a,b]$，记为$f\in L_2^p[a,b]$.

引理 1 设$\Phi(f(t))$是$C[a,b]$上的任意线性连续泛函，$a\leqslant\alpha\leqslant b$，则对$f(t)\in L_2^1[a,b]$有

$$\Phi(f(t))-f(\alpha)\Phi(1)-f'(\alpha)(\Phi(t)-\alpha\Phi(1))=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad(2.1)$$

其中$D_2(\alpha,\xi)\stackrel{\text{def}}{=}\Phi(|t-\xi|)-|\alpha-\xi|\Phi(1)-(\Phi(t)-\alpha\Phi(1))\cdot\mathrm{sgn}(\alpha-\xi)$，$\mathrm{sgn}(t)$是$t$的符号函数[4],[5]，$\mathrm{sgn}(t)=1(t>0)$，$\mathrm{sgn}(t)=-1(t<0)$，$\mathrm{sgn}(0)=0$.

引理 2 (i) 当$\alpha<\xi$时$D_2(\alpha,\xi)=2\Phi((t-\xi)_+)$；

(ii) 当$\alpha>\xi$时$D_2(\alpha,\xi)=2\Phi((\xi-t)_+)$；

(iii) 当$\alpha=\xi$时$D_2(\alpha,\alpha)=\Phi(|t-\alpha|)=\Phi((t-\alpha)_+)+\Phi((\alpha-t)_+)$.

证明 对(i)，(ii)和(iii)中的$D_2(\alpha,\alpha)=\Phi(|t-\alpha|)$参见文[5]，注意等式$|t-\alpha|=(t-\alpha)_++(\alpha-t)_+$，即得到引理 2.

引理 3 设$\Phi(f(t))$是$C[a,b]$上的任意正线性泛函，则对$a\leqslant\alpha\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$有$D_2(\alpha,$

$\xi) \geqslant 0$ 和 $\Phi((t-\alpha)^2)=\int_a^b D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi$.

证明 参见文[5]中定理2证明中的(2.17)式.

引理4 设$\Phi(f(t))$是$C[a,b]$上的任意线性二阶弱正泛函，则对$a\leqslant\xi\leqslant b, a\leqslant\alpha\leqslant b$有$D_2(\alpha,\xi)\geqslant 0$和$\Phi((t-\alpha)^2)=\int_a^b D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi$.

证明 从线性二阶弱正泛函的定义和用引理2得到$D_2(\alpha,\xi)\geqslant 0$，因此在引理1中取$f(t)=(t-\alpha)^2$，因$f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0, f''(t)=2$，得到$\Phi((t-\alpha)^2)=\int_a^b D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi$.

设$g\in C[a,b]$，$\|g\|_c \stackrel{\text{def}}{=\!=} \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|$. 设$M_i$是绝对正常数.

定理1 设$a\leqslant\alpha\leqslant b$和$\Phi_n(f(t))$是$C[a,b]$上任意线性二阶弱正泛函序列，设$\Phi_n$满足条件(1) $|\Phi_n(g)|\leqslant M_1\cdot\|g\|_c$，对所有$g\in C[a,b]$(2)当$n\to\infty$时有$\Phi_n(1)\to 1, \Phi_n(t)\to\alpha, \Phi_n(t^2)\to\alpha^2$，则对所有$f(t)\in C[a,b]$有$\Phi_n(f)\to f(\alpha)(n\to\infty)$.

证明 设$f(t)\in C[a,b]$，用Weierstrass定理得到存在代数多项式$P(t)$使得$\|f(t)-P(t)\|_c<\varepsilon$，用引理1有

$$\Phi_n(P(t))-P(\alpha)\Phi_n(1)-P'(\alpha)(\Phi_n(t)-\alpha\Phi_n(1))=\frac{1}{2}\int_a^b P''(\xi)D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

从Φ_n是线性二阶弱正泛函，用引理4得到对$a\leqslant\alpha\leqslant b$和$a\leqslant\xi\leqslant b$有$D_2(\alpha,\xi)\geqslant 0$和$\int_a^b D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi=\Phi_n((t-\alpha)^2)$，因此

$$|\Phi_n(P(t))-P(\alpha)\Phi_n(1)-P'(\alpha)(\Phi_n(t)-\alpha\Phi_n(1))|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|D_2(\alpha,\xi)|\mathrm{d}\xi\cdot\|P''\|_c$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^b D_2(\alpha,\xi)\mathrm{d}\xi\cdot\|P''\|_c=\frac{1}{2}\Phi_n((t-\alpha)^2)\cdot\|P''\|_c,$$

用条件(2)得到

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n((t-\alpha)^2)=\lim_{n\to\infty}(\Phi_n(t^2)-2\alpha\Phi_n(t)+\alpha^2\Phi_n(1))=\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2=0,$$

因此对$\varepsilon>0$，存在自然数N_1，使对$n\geqslant N_1$有

$$|\Phi_n(P(t))-P(\alpha)\Phi_n(1)-P'(\alpha)(\Phi_n(t)-\alpha\Phi_n(1))|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\|P''\|_c, \qquad (2.2)$$

因此

$$\begin{aligned}&\Phi_n(f(t))-f(\alpha)\Phi_n(1)\\&=\Phi_n(f(t)-P(t))+[\Phi_n(P)-P(\alpha)\Phi_n(1)-P'(\alpha)[\Phi_n(t)-\alpha\Phi_n(1)]+\\&\quad[P(\alpha)\Phi_n(1)-f(\alpha)\Phi_n(1)]+[P'(\alpha)(\Phi_n(t)-\alpha\Phi_n(1))]\\&\stackrel{\text{def}}{=\!=}:I_1+I_2+I_3+I_4,\end{aligned}$$

用条件(1)

$$|I_1|\leqslant M_1\cdot\|f-P\|_c<\varepsilon\cdot M_1,$$

用(2.2)式

$$|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\|P''\|_c \quad (n\geqslant N_1),$$

从$\Phi_n(1)\to 1(n\to\infty)$，因此$|\Phi_n(1)|\leqslant M_2$,

$|I_3| = |P(a) - f(a)| \cdot |\Phi_n(1)| < \varepsilon \cdot M_2$, $\quad |I_4| \leqslant \| P' \|_c \cdot |\Phi_n(t) - a\Phi_n(1)|$,
从条件(2)得到 $\Phi_n(t) - a\Phi_n(1) \to a - a = 0 (n \to \infty)$，因此存在 N_2，当 $n \geqslant N_2$ 时 $|I_4| < \varepsilon \cdot \| P' \|_c$，当 $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ 时有

$$|\Phi_n(f(t)) - f(a)\Phi_n(1)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|$$
$$< \varepsilon \cdot M_1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \| P'' \|_c + \varepsilon \cdot M_2 + \varepsilon \cdot \| P' \|_c. \qquad \square$$

定理 2 设 $L_n(f(t),x)$ 是映 $C[a,b] \Rightarrow C[a,b]$ 的线性二阶弱正算子序列，满足条件(1)对所有 $g \in C[a,b]$ 有 $\| L_n g \|_c \leqslant M_3 \cdot \| g \|_c$，(2)对 $i = 0,1,2$ 有 $L_n(t^i, x) = x^i + \alpha_n^{(i)}(x)$，和当 $n \to \infty$ 时 $\alpha_n^{(i)}(x)$ 在$[a,b]$上一致趋于零，则对每一 $f(t) \in C[a,b] L_n(f,x)$ 在$[a,b]$上一致趋于 $f(x)$.

证明 对固定的 $x \in C[a,b]$，考虑 $\Phi_n(f) = L_n(f(t),x)$，类似于定理 1 可以证明定理 2.

文[1]上的正线性算子序列收敛定理是定理 2 的特例(注意如 $L_n(g)$ 是正线性算子，从对所有 $g \in C[a,b]$ 有 $-\| g \|_c \leqslant g(t) \leqslant \| g \|_c$ 得到 $-L_n(1,x) \cdot \| g \|_c \leqslant L_n(g(t),x) \leqslant \| g \|_c \cdot L_n(1,x)$，$\| L_n(g) \|_c \leqslant \| L_n(1,x) \|_c \cdot \| g \|_c \leqslant M_4 \| g \|_c$，也见[5]).

3 Grundmann 定理的推广

1981 年作者引进了 Kantorovitch 型算子的概念. 设 T 是 $C[a,b] \Rightarrow AC[a,b]$ 的线性算子，对任一 $g(u) \in C[a,b]$ 有 $T(g(u),a) = g(a)$ 和 $T(g(u),b) = g(b)$，设 $f(t) \in L[a,b]$，$F(u) = \int_a^u f(t)\mathrm{d}t$，$A(f(t),x) \xlongequal{\text{def}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T(F(u),x)$，则 A 称为 Kantorovitch 型算子，记为 $A \in K$. 作者指出：Kantorovitch 多项式 $P_n(f) \in K$[4],[6]，积分 Schoenberg 样条 $T_{n,k}(f) \in K$[7]，积分 Meyer-Kőnig-Zeller 算子 $M_n(f) \in K$[8]，连著名的 Durrmeyer 算子也属于 K(已发表在多人国际合作论文[9]中(定理 12))，上面 4 个算子在矩形区域上的二元对应算子也是二元 Kantorovitch 型算子[10]，在将来的论文中作者还将给出一些新的例子. 这种算子是一种积分微分算子，象积分微分方程一样，很有研究价值.

定理 3 设 $A_n \in K$：$A_n(f(t),x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T_{n+1}(F(u),x)$，$T_n$ 是映 $C[a,b] \Rightarrow AC[a,b]$ 的线性算子序列，$T_n(1,x) = 1$，$T_n(u,x) = x$；设 A_n 是一阶弱正算子序列，则 $\int_a^b |A_n(\lambda(t-\xi),x) - \lambda(x-\xi)| \mathrm{d}x = T_{n+1}(|u-\xi|,\xi)$；设算子模 $\| A_n \|_{L \to L} = O(1)$，$0 < \rho_n \leqslant b - a$，为对所有 $f \in L[a,b]$ $\| A_n f - f \|_1 = O(\omega_1(f,\rho_n)_L)$，这儿 $\omega_1(f,\delta)_L \xlongequal{\text{def}} \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \{\int_a^{b-t} |f(x+t) - f(x)| \mathrm{d}x\}$，充分必要地 $\operatorname*{Vraisup}\limits_{a<\xi<b} T_{n+1}(|u-\xi|,\xi) = O(\rho_n)$.

证明 对 A_n 是线性正算子情况在文[7][11]中已证明，文[7]中的证明，实际上只利用了对 $a \leqslant \xi \leqslant b$ 有 $A_n(\lambda(t-\xi),x) \geqslant 0$ 和 $A_n(\mu(t-\xi),x) \geqslant (a \leqslant x \leqslant b)$，因此定理 2 当 A_n 是一阶弱正算子序列时也成立.

推论 1 设 $f \in L[0,1]$，则

$$\| P_n(f) - f \|_1 \leqslant M_t \cdot \omega_1(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}})_L.$$

证明　见文[6][7][11]. 推论 1 是 Grundmann 定理[12].

推论 1 也是 Bojanic-Shisha 定理的加强[12].

4　对陈天平一文的注记

前苏联学派曾系统地研究了函数类的逼近，$W^2 \xlongequal{\text{def}} \{f \mid \| f'' \|_c \leqslant 1\}$，$W^2L \xlongequal{\text{def}} \{f \mid f' \in AC[a,b]$ 和 $\| f'' \|_1 \leqslant 1\}$. 作者在文[4]中证明

定理 A　设 A_n 是一列映 $C[a,b] \Rightarrow C[a,b]$ 的线性连续算子，设 $A_n(1,x) = 1$，则当 $f \in L_2^1[a,b]$ 时有

$$A_n(f(t),x) - f(x) - f'(x)(A_n(t,x) - x) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi) D_n(x,\xi) \mathrm{d}\xi,$$

其中

$$D_n(x,\xi) \xlongequal{\text{def}} A_n(|t-\xi|,x) - |x-\xi| - (A_n(t,x) - x) \cdot \operatorname{sgn}(x-\xi), \epsilon_n(W^2_, x)$$

$$\xlongequal{\text{def}} \sup_{f \in W^2} |A_n(f(t),x) - f(x) - f'(x)(A_n(t,x) - x)| = \frac{1}{2}\int_a^b |D_n(x,\xi)| \mathrm{d}\xi.$$

定理 B　设 A_n 是一列 $C[a,b] \Rightarrow C[a,b]$ 的线性正算子，设 $A_n(1,x) = 1$，则当 $x \in [a,b]$ 和 $\xi \in [a,b]$ 时有 $D_n(x,\xi) \geqslant 0$，此外 $\epsilon_n(W^2,x) = \frac{1}{2}A_n((t-x)^2,x)$.

定理 C　设 $A_n \in K$：$A_n(f(t),x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B_{n+1}(\int_a^u f(t)\mathrm{d}t, x)$，$A_n$ 是一列线性正算子，则

$$\epsilon_n(W^2L)_L \xlongequal{\text{def}} \sup_{f \in W^2L} \int_a^b |A_n(f(t),x) - f(x) - f'(x)(A_n(t,x) - x)| \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \| B_{n+1}(u^2,\xi) - \xi^2) \|_{C[a,b]}.$$

陈天平在文[13]中说定理 B，定理 C 是一些简单事实的推论. 其实文[13]中的证明有几处变量不清，该文作者没有仔细看文[4]，文[4]中证明方法的优点是对一般的线性二阶弱正算子证明了定理 B 和定理 C，这是因为在文[4]中证明了不等式：当 $x > \xi$ 时，$D_n(x,\xi) = 2A_n((\xi - t)_+, x) \geqslant 0$；当 $x < \xi$ 时，$D_n(x,\xi) = 2A_n((t-\xi)_+, x) \geqslant 0$，$D_n(x,x) = A_n(|t-x|,x) = A_n((x-t)_+,x) + A_n((t-x)_+,x) \geqslant 0$. 而文[13]中讨论的只是特殊情况(线性正算子情况)，方法并不适用于线性二阶弱正算子情况. 又作者文[4]中定理 A 是对一般的线性连续算子证明的，而把正算子情况作为特殊情况(推论)导出.

作者对德国 Duisburg 大学 H. H. Gonska 教授从 1986 年至今的多年合作研究和讨论表示感谢.

参考文献：

[1]　KOROVKIN P P. *Linear Operators and Approximation Theory* [M]. Beijing: Press of High Education, 1960.

[2]　王仁宏. 无界函数逼近[M]. 北京：科学出版社，1983.
WANG R H. *Approximation of Unbounded Functions* [M]. Beijing: Press of Sciences, 1983.

[3] 孙永生. 关于周期函数用线性算子的平均逼近[J]. 数学学报, 1982, S:561—577.
SUN Yong-sheng. *On the approximation of periodic functions in mean by linear operators* [J]. Acta Math. Sinica, 1982, **5**: 561—577.

[4] 曹家鼎. 论广义的 Kantorovitch, L,B 多项式及其渐近行为[J]. 数学年刊, 1981, **2**(2): 243—255.
CAO Jia-ding. *On generalized polynomials of L. V. Kantorovitch and their asymptotic behaviors* [J]. Chinese Annals Math., 1981, **2**(2): 243—255.

[5] 曹家鼎. 论正线性算子的某些等式和 L^p-渐近估计[J]. 数学年刊 A 辑, 1983, **4**(2): 235—244.
CAO Jia-ding. *On some equalities of positive linear operators and L^p-asymptotic estimations* [J]. Chinese Ann. Math., Ser A, 1983, **4**(2): 235—244.

[6] 曹家鼎. 论非周期函数在 L^p 空间中用奇异积分逼近[J]. 数学学报, 1981, **24**: 9—25.
CAO Jia-ding. *Approximation of non-periodic functions in L^p space by the singular integrals* [J]. Acta. Math. Sinica, 1981, **24**: 9—25.

[7] CAO Jia-ding. *On Kantorovič type operators and integral Schoenberg Splines*[J]. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 1983, **42**: 189—203.

[8] MÜLLER M W. *L_p-approximation by the method of integral Meyer-König and Zeller operators* [J]. Studia Math, 1978, T. LXIII: 81—88.

[9] COTTIN C, GAVREA I, GONSKA H H, KACSO D P, et al. *Global Smoothness Preservation and the variation-Diminishing Property* [J]. Duisburg Univ., Germany, 1998.

[10] 曹家鼎. 论二维积分 Schoenberg 样条的 Müller 问题 [C]. 中国工业应用数学学会第四次大会论文集. 上海:复旦大学出版社, 1996, 492—496.
CAO Jia-ding. *On Müller problem of two dimensional integral Schoenberg splines* [C]. Proceedings of Fourth conference of Society for Industrial and Applied Mathematics of China. Shanghai: Press of Fudan University, 1996, 492—496.

[11] CAO Jia-ding. *Degree of L^p-approximation by operators of Kantorovič type satisfying Micchelli conditions* [J]. Jour. of Math. Res & Expo., 1984, **2**: 43—46.

[12] GRUNDMANN A. *Guteabschatzungen für den Kantorovič-operator in der L_1 norm* [J]. Math Zeit, 1976, **150**: 45—47.

[13] 陈天平. 对"论广义的 Kantorovitch, L. B 多项式及其渐近行为"一文的几点注记 [J]. 数学研究与评论, 1983, **3**: 137—138.
CHEN Tian-ping. *Some remarks for "On generalized polynomials of L. V. Kantorovitch and their asymptotic behaviors"* [J]. J. of Math. Research and Exposition, 1983, **3**: 137—138.

Approximation by Linear Weak Positive Operators

CAO Jia-ding
(Dept. of Math., Fudan University, Shanghai 200433), China

Abstract: Approximation theory by linear positive operators had been developed at a high speed, but positivity is stronger restriction. Sun Yongsheng and Wang R. H. had researched reducing restriction of positivity, author researches approximation by linear weak positive operators, generalizes Korovkin Theorem and Grundmann Theorem etc.

Key words: positive operators; weak positive operators; theory of approximation.