第21卷第1期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 1
2001年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2001

一类极限循环连分式的加速收敛因子*

唐 烁， 朱功勤
(合肥工业大学应用数学研究所，安徽 合肥 230009)

摘 要：本文获得了一类极限循环连分式的加速收敛因子，证明了它们具有良好的加速收敛性质.

关键词：极限循环连分式；加速收敛因子；加速收敛.
分类号：AMS(1991) 65B05/CLC O241.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)01-0135-04

1 引 言

众所周知，在对极限循环连分式 $K(a_n/1)$ 的加速收敛中，所谓的加速收敛因子[1,2]起着十分重要的作用，这不仅表现在许多著名的变换：如 Aitken$-\Delta^2$ 过程、T_{+m}变换、levin 变换等用来对极限循环连分式加速收敛均可以通过它表示，而且通过它来对这些序列变换的加速效果进行比较，从中可以进行选择合适的方法. 这是直接用序列变换进行加速收敛很难做到的[1-3]. 在[3]中，我们给出了选择加速收敛因子的准则，并对几种常见的加速收敛因子进行了比较，从中我们可以看到这些加速收敛因子对不同的极限循环连分式有不尽相同的加速效果. 本文从尾式序列出发，根据加速收敛因子的特征[3]. 给出了一类极限循环连分式的加速收敛因子，它比目前常见的加速收敛因子具有更强的加速效果，为节省篇幅，本文所采用的术语与记号见文献[1-5].

2 一类加速收敛因子的构造及性质

引理 1[3] 给定连分式 $K(a_n/1)$，$a_n\to a$，$a\notin(-\infty,-\frac{1}{4}]\backslash\{0\}$，则$\frac{S_n(w_n)-f}{f_n-f}\to 0$ 当且仅当序列$\{w_n\}$满足：$w_n\to x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a}}{2}$.

引理 2[4] 令 $K(a_n/1)$ 满足 $a_n\to a$，$|\arg(a+\frac{1}{4})|<\pi$，则$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\to t\in C$ 当且仅当$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\to$

* 收稿日期：1998-01-08
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19501011)
作者简介：唐烁(1964-)，男，硕士，合肥工业大学副教授.

$t \in C$,其中 $\varepsilon_n = f^{(n)} - x_1$,$\delta_n = a_n - a$

引理 3[4] 设极限循环连分式 $K(a_n/b_n)$ 为双曲型或斜驶型,则满足递推关系

$$g_{n-1} = \frac{a_n}{b_n + g_n} \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

的序列 $\{g_n\}$ 收敛.

由连分式 $K(a_n/1)$ 的尾式:$f^{(n)} = \frac{a_{n+1}}{1} + \frac{a_{n+2}}{1} + \cdots$ 得递推关系:

$$f^{(n-1)} = \frac{a_n}{1 + f^{(n)}}. \tag{1}$$

由于 $f^{(n)} \to x_1$,故设 $f^{(n)} = x_1 + \varepsilon_n$,其中 $\varepsilon_n \to 0$. 代入(1)整理得

$$x_1\varepsilon_n + (1 + x_1 + \varepsilon_n)\varepsilon_{n-1} = a_n - x_1 - x_1^2. \tag{2}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - x_1 - x_1^2}{a_n - x_1 - x_1^2} = t_1$,由于 $a = x_1(1 + x_1)$,故由引理 2 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = t_1$. 由(2)得

$$\frac{a_{n+1} - x_1 - x_1^2}{\varepsilon_n} = x_1\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} + 1 + x_1 + \varepsilon_n \to 1 + x_1 + x_1t_1 \neq 0.$$

由此令 $\hat{\varepsilon}_n = \frac{a_{n+1} - x_1 - x_1^2}{1 + x_1 + x_1t_1}$,取

$$W_n = x_1 + \hat{\varepsilon}_n = x_1 + \frac{a_{n+1} - x_1 - x_1^2}{1 + x_1 + x_1t_1}, \tag{3}$$

即 $W_n = \frac{a_{n+1} + x_1^2t_1}{1 + x_1 + x_1t_1}$.

这样我们由加速收敛因子 x_1,构造出加速收敛因子 $W_n = \frac{a_{n+1} + x_1^2t_1}{1 + x_1 + x_1t_1}$. 完全类似的过程,由 $W_n = \frac{a_{n+1} + x_1^2t_1}{1 + x_1 + x_1t_1}$ 可以构造出加速收敛因子 $W'_n,\cdots$,现将这些加速收敛因子重新记号,得如下递推关系:

$$W_1^{(n)} = x_1, W_k^{(n)} = \frac{a_{n+1} + x_1W_{k-1}^{(n)}t_{k-1}}{1 + W_{k-1}^{(n+1)} + x_1t_{k-1}}, k = 2,3,4,\cdots,$$

其中 $t_k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - W_k^{(n)}(1 + W_k^{(n+1)})}{a_n - W_k^{(n-1)}(1 + W_k^{(n)})}$ $(k = 1,2,3,\cdots)$.

由数学归纳法,不难证明如下结论:

定理 2.1 由上述构造的 $W_1^{(n)},\cdots,W_k^{(n)},\cdots$ 是极限循环连分式 $K(a_n/1)$ 的加速收敛因子.

这样一类加速收敛因子,具有下述优良性质:

定理 2.2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - W_k^{(n)}(1 + W_k^{(n+1)})}{a_n - W_k^{(n-1)}(1 + W_k^{(n)})} = t_k (t_k \neq 0)$,则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(W_k^{(n)}) - f}{S_n(W_{k-1}^{(n)}) - f} = 0.$$

注 若 $t_k = 0$ 则极限循环连分式 $K(a_n/1)$ 为超线性收敛,此时,连分式本身收敛的速度快,在这种情况下,考虑其加速收敛问题意义不大.

证明 由 $S_n(W_n) = \frac{A_n + A_{n-1}W_n}{B_n + B_{n-1}W_n}$ 不难得到

$$\frac{S_n(W_k^{(n)}) - f}{S_n(W_{k-1}^{(n)}) - f} = \frac{f^{(n)} - W_k^{(n)}}{f^{(n)} - W_{k-1}^{(n)}} \cdot \frac{h_{n-1} + W_k^{(n)}}{h_n + W_{k-1}^{(n)}}. \tag{4}$$

由定理 2.1 知，$W_{k-1}^{(n)}$ 为 $K(a_n/1)$ 的加速收敛因子.

故可设 $f^{(n)}=W_{k-1}^{(n)}+e_{k-1}^{(n)}$. 由递推关系：$f^{(n)}=\frac{a_{n+1}}{1+f^{(n+1)}}$ 可得

$$a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}=e_{k-1}^{(n)}+e_{k-1}^{(n+1)}W_{k-1}^{(n)}+e_{k-1}^{(n)}e_{k-1}^{(n+1)}+e_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}, \tag{5}$$

因而

$$\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}=\frac{e_{k-1}^{(n)}}{e_{k-1}^{(n-1)}}\frac{1+W_{k-1}^{(n)}e_{k-1}^{(n+1)}/e_{k-1}^{(n)}+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}}{1+W_{k-1}^{(n-1)}e_{k-1}^{(n)}/e_{k-1}^{(n-1)}+e_{k-1}^{(n)}+W_{k-1}^{(n)}}. \tag{6}$$

令

$$g_{k-1}^{(n)}=W_{k-1}^{(n)}\frac{e_{k-1}^{(n+1)}}{e_{k-1}^{(n)}}, \tag{7}$$

代入(6)得

$$W_{k-1}^{(n-1)}\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}=g_{k-1}^{(n-1)}\frac{1+g_{k-1}^{(n)}+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}}{1+W_{k-1}^{(n-1)}e_{k-1}^{(n)}/e_{k-1}^{(n-1)}+e_{k-1}^{(n)}+W_{k-1}^{(n)}}.$$

所以

$$\begin{aligned}&W_{k-1}^{(n+1)}\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}(1+e_{k-1}^{(n)}+W_{k-1}^{(n)})+\\&\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}W_{k-1}^{(n-1)}g_{k-1}^{(n-1)}\\&=g_{k-1}^{(n-1)}(1+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}+g_{k-1}^{(n)}),\end{aligned}$$

即

$$g_{k-1}^{(n-1)}=\frac{W_{k-1}^{(n-1)}(1+e_{k-1}^{(n)}+W_{k-1}^{(n)})\dfrac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}}{1+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}-W_{k-1}^{(n)}\dfrac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}}+g_{k-1}^{(n)}}. \tag{8}$$

记

$$c_n=W_{k-1}^{(n-1)}(1+e_{k-1}^{(n)}+W_{k-1}^{(n)})\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}},$$

$$d_n=1+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}-W_{k-1}^{(n)}\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{a_n-W_{k-1}^{(n-1)}-W_{k-1}^{(n-1)}W_{k-1}^{(n)}},$$

则(8)化为

$$g_{k-1}^{(n-1)}=\frac{c_n}{d_n+g_{k-1}^{(n)}}. \tag{9}$$

由于 $c_n\to x_1(1+x_1)t_k=at_{k-1}\neq 0, d_n\to 1+x_1-x_1t_{k-1}$，因 $t_{k-1}\neq 0$，非奇异线性分式变换 $S(w)=\frac{at_{k-1}}{(1+x_1-x_1t_{k-1})+W}$ 有两个不动点：$-(1+x_1)$ 和 x_1t_{k-1}. 因 $|(1+x_1-x_1t_{k-1})+(-1-x_1)|<|(1+x_1-x_1t_{k-1})+x_1t_{k-1}|$. 故 $S(w)$ 为双曲型或斜驶型. 因而连分式 $K(c_n/d_n)$ 是双曲型的或斜驶型的极限循环连分式. 由引理 3 知 $\{g_{k-1}^{(n)}\}$ 收敛.

由(7) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e_{k-1}^{(n)}}{e_{k-1}^{(n-1)}}$ 存在，再由(6) 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e_{k-1}^{(n)}}{e_{k-1}^{(n-1)}}=t_{k-1}$. 又因

$$\frac{f^{(n)}-W_k^{(n)}}{f^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}}=1-\frac{W_k^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}}{e_{k-1}^{(n)}}$$

$$=1-\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{e_{k-1}^{(n)}}\cdot\frac{1}{1+W_{k-1}^{(n+1)}+x_1t_{k-1}},\tag{10}$$

再由(5)得

$$\frac{a_{n+1}-W_{k-1}^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}W_{k-1}^{(n+1)}}{e_{k-1}^{(n)}}=1+e_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n+1)}+W_{k-1}^{(n)}\frac{e_{k-1}^{(n+1)}}{e_{k-1}^{(n)}}\to 1+x_1+x_1t_{k-1}\tag{11}$$

而

$$\frac{1}{1+W_{k-1}^{(n+1)}+x_1t_{k-1}}\to\frac{1}{1+x_1+x_1t_{k-1}}.\tag{12}$$

因此由(10),(11),(12)得

$$\frac{f^{(n)}-W_k^{(n)}}{f^{(n)}-W_{k-1}^{(n)}}\to 1-(1+x_1+x_1t_{k-1})\frac{1}{1+x_1+x_1t_{k-1}}=0.\tag{13}$$

又由(4),(13)得

$$\frac{S_n(W_k^{(n)})-f}{S_n(W_{k-1}^{(n)})-f}\to 0.$$

参考文献:

[1] LEMBARKI A. *Acceleration of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformation* [J]. J. Comput. Appl. Math., 1987, **19**: 109—116.

[2] TANG Shuo, ZHU Gong-qin. *On the acceleration convergence of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformation* [J]. J. Comp. Appl. Math., 1994, **51**: 267—274.

[3] TANG Shuo, TAN Jie-qin, ZHU Gong-qin. *On the Choices of accelerating convergence factors for limit periodic continued fraction $K(a_n/1)$* [J]. Numer. Math. A Journal of Chinese Universities, 1996, **1**: 62—70.

[4] JACOBSEN L, WAADELAND H. *An asymptotic property for tail of limit periodic continued fractions* [J]. Rocky Mt. J. Math., 1990, **1**: 151—163.

[5] JACOBSEN L, WAADELAND H. *Convergence cceleration of limit Periodic continued fractions Under asymptotic Side conditions* [J]. Numer. Math., 1988, **53**: 285—298.

A Kind of Accelerating Convergence Factors for Limit Periodic Continued Fraction

TANG Shuo, ZHU Gong-qin

(Inst. of Appl. Math., Hefei University of Technology, 230009, China)

Abstract: In this paper, a kind of accelerating convergence factors are obtained for limit periodic continued fraction. A good accelerating convergence property is proved on them.

Key words: limit periodic continued fraction; accelerating convergence factors; accelerating convergence.