线性子空间关系运算的Plücker坐标表示*

牛兴文
(北京化工大学应用数理系，北京 100029)

摘 要：本文讨论了线性子空间 Plücker 的线性表示，给出了 Plücker 关系式的矩阵形式，并由之导出了子空间关联关系、零化子空间、和子空间与交子空间 Plücker 坐标的矩阵表达式.

关键词：线性子空间；Plücker 坐标；Plücker 关系式.
分类号：AMS(1991) 15/CLC O151
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0143-05

线性空间的关系运算在许多研究领域中都有广泛而深入的应用.例如，近年来兴起的超平面构形研究[1]中，即有大量的应用.线性子空间的 Plücker 坐标以及它所满足的 Plücker 关系式[2,3]作为经典内容，早已为人熟知，但在子空间的关系运算下，Plücker 坐标具有怎样的关系和运算，迄今尚未见到有关结果.为此，本文给出下边的研究.

1 Plücker 关系式的矩阵形式

设 V 是 n 维线性空间，$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是 V 的一个基. U 是 V 的一个 r 维子空间，$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$是 U 的一个基. $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)M^{\mathrm{T}}$，$M=(a_{ij})_{rn}$.

记 $p^{i_1i_2\cdots i_r}=\det M(i_1,i_2,\cdots,i_r)$，$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_r\leqslant n$，这里 $M(i_1,i_2,\cdots,i_r)$表示 M 第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 列构成的子矩阵，则$\{p^{i_1i_2\cdots i_r}|1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_r\leqslant n\}$为 U 在基$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$下的 Plücker 坐标，在相差一个非零常数因子意义下由 U 唯一决定.子空间的 Plücker 坐标满足 Plücker 关系式[7]

$$\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^k p^{i_1i_2\cdots\hat{i}_k\cdots i_ri_{r+1}}p^{j_1j_2\cdots j_{r-1}i_k}=0, \tag{1}$$

这里 $\hat{i}_k$ 表示去掉 i_k.

引理 设 $p^{i_1i_2\cdots i_r}\neq 0$，令 $\gamma_k=\sum_{l=1}^{n}p^{i_1i_2\cdots\hat{i}_k\cdots i_rl}e_l$，$k=1,2,\cdots,r$，则$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$构成 U 的基.

证明

---

* 收稿日期：1999-11-11
基金项目：岳阳兴长出版基金资助项目.
作者简介：牛兴文(1956-)，男，山西大同人，副教授.

$$p^{i_1 i_2 \cdots \hat{i}_k \cdots i_r l} = \det M(i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, \cdots, i_r, l)$$
$$= \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_{k-1}} & a_{1i_{k+1}} & \cdots & a_{1i_r} & a_{1l} \\ a_{2i_1} & \cdots & a_{2i_{k-1}} & a_{2i_{k+1}} & \cdots & a_{2i_r} & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ri_1} & \cdots & a_{ri_{k-1}} & a_{ri_{k+1}} & \cdots & a_{ri_r} & a_{rl} \end{vmatrix}.$$

记 a_{hl}的代数余子式为 A_h^k,按最后一列展开,有

$$p^{i_1 \cdots \hat{i}_k \cdots i_r l} = \sum_{h=1}^{r} a_{hl} A_h^k,$$

从而 $\gamma_k = \sum_{l=1}^{n} (\sum_{h=1}^{r} a_{hl} A_h^k) e_l = \sum_{h=1}^{r} A_h^k \sum_{l=1}^{n} a_{hl} e_l = \sum_{h=1}^{r} A_h^k \alpha_h \in U, k = 1,2,\cdots,r$,即有 $L(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r) \subseteq U$.

设$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A^{\mathrm{T}}$,$A$ 为 $r \times n$ 矩阵,它的第(k,j)元为 $p^{i_1 \cdots \hat{i}_r \cdots i_r j}$. 则由 Plücker 坐标的反对称性,$A(i_1, i_2, \cdots, i_r) = p^{i_1 i_2 \cdots i_r} D$,这里

$$D = \mathrm{diag}((-1)^{r-1}, (-1)^{r-2}, \cdots, (-1)^{r-r}).$$

显然,$A(i_1, i_2, \cdots, i_r)$为满秩矩阵,从而$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r)$线性无关,构成 U 的基. □

在下文中,称上述 A 为 U 在基$(e_1, \cdots, e_n)$下按排列$(i_1, i_2, \cdots, i_r)$写出的 Plücker 坐标矩阵,记为 $U[i_1, i_2, \cdots, i_r]$.

定理 1 设 $p^{i_1 i_2 \cdots i_r} \neq 0, p^{j_1 j_2 \cdots j_r} \neq 0, A = U[i_1, i_2, \cdots, i_r], B = W[j_1, j_2, \cdots, j_r]$,则

$$p^{i_1 i_2 \cdots i_r} B = B(i_1, i_2, \cdots, i_r) DA. \tag{2}$$

证明 由引理,$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A^{\mathrm{T}}$, $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) B^{\mathrm{T}}$ 都是 U 的基,因而有过渡矩阵 X,使$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) X$,即有 $B = X^{\mathrm{T}} A$. 两边取第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 列构成的子矩阵,得 $B(i_1, \cdots, i_r) = X^{\mathrm{T}} A(i_1, \cdots, i_r) = X^{\mathrm{T}} (p^{i_1 \cdots i_r} D)$,有 $X^{\mathrm{T}} = \frac{1}{p^{i_1 \cdots i_r}} B(i_1, i_2, \cdots, i_r) D$. 代回 $B = X^{\mathrm{T}} A$,即有 $p^{i_1 i_2 \cdots i_r} B = B(i_1, i_2, \cdots, i_r) DA$. □

在(2)式两边取第(r,l)元,令 $l = i_{r+1}$,两边乘以$(-1)^r$,即得(1). 所以(2)是 Plücker 关系式的矩阵形式,若记 $\widetilde{A} = \frac{1}{p^{i_1 i_2 \cdots i_r}} DA, \widetilde{B} = \frac{1}{p^{j_1 j_2 \cdots j_r}} DB$,则(2)可写成 $\widetilde{B} = \widetilde{B}(i_1, i_2, \cdots, i_r) \widetilde{A}$.

下文中的定理将上述 $\widetilde{A}$ 记为 $U\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$.

2 关联关系的坐标表示

设 U, W 分别是 n 维线性空间 V 的 r 维和 s 维子空间,它们在 V 的基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下的 Plücker 坐标分别为$\{p^{i_1 i_2 \cdots i_r}\}$ 和$\{q^{j_1 j_2 \cdots j_s}\}$.

设 $p^{i_1 i_2 \cdots i_r} \neq 0, q^{j_1 j_2 \cdots j_s} \neq 0$,且 $A = U\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}, B = W\{j_1, j_2, \cdots, j_s\}$,则有

定理 2 U 是 W 的子空间当且仅当 $A = A(j_1, j_2, \cdots, j_s) B$.

证明 由引理,$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A^{\mathrm{T}}$, $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = (e_1, e_2, \cdots, e_n) B^{\mathrm{T}}$ 分别是 U, W 的基. U 是 W 的子空间当且仅当存在 $r \times s$ 矩阵 X,使$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \cdots,$

$\beta_s)X^{\mathrm{T}}$,即有矩阵 X,使 $A=XB$. 在两边取第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列构成的子矩阵,有 $X=A(j_1,j_2,\cdots,j_s)$,故有 $A=A(j_1,j_2,\cdots,j_s)B$. □

3 零化子空间的坐标表示

设 U 是 n 维线性空间 V 的 r 维子空间. V^* 是 V 的对偶空间,U^0 是 U 的零化子空间. $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 是 V 的基,$(f^1,f^2,\cdots,f^n)$ 是 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的对偶基. $p^{i_1i_2\cdots i_r}\neq 0$,$U\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}=A$,$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$,$1\leqslant i_{r+1}<i_{r+2}<\cdots<i_n\leqslant n$,$\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\cup\{i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$,$T=(\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_r},\varepsilon_{i_{r+1}},\cdots,\varepsilon_{i_n})$,这里 $\varepsilon_k^{\mathrm{T}}=(0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots,0)$,则在对偶基 $(f^1,f^2,\cdots,f^n)$ 下,有

定理 3 $U^0\{i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_n\}=(-A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-r})T^{\mathrm{T}}$

证明 记 $M=(-A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-r})T^{\mathrm{T}}$,令 $(\alpha^{r+1},\alpha^{r+2},\cdots,\alpha^n)=(f^1,f^2,\cdots,f^n)M^{\mathrm{T}}$,$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{pmatrix}\alpha^{r+1}\\ \alpha^{r+2}\\ \vdots\\ \alpha^n\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=MA^{\mathrm{T}}$$

由 $AT=(E_r\vdots A(i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_n))$,有 $A^{\mathrm{T}}=T\begin{pmatrix}E_r\\ A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,可得 $MA^{\mathrm{T}}=0$,即有 $\alpha^i(\alpha_j)=0,i=r+1,\cdots,n;j=1,2,\cdots,r$.

所以 $U(i_{r+1},\cdots,i_n\}=(-A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-r})T^{\mathrm{T}}$. □

设 U,W,A,B 如 2 中所设,$A=U\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}=(E_r\vdots A(i_{r+1},\cdots,i_n))T^{\mathrm{T}}$,$B=W\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}=(E_s\vdots B(j_{s+1},\cdots,j_n))S^{\mathrm{T}}$,这里 $S=(\varepsilon_{j_1},\varepsilon_{j_2},\cdots,\varepsilon_{j_n})$. 则有

定理 4 U 是 W 的子空间当且仅当

$$(-B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-s})S^{\mathrm{T}}T\begin{pmatrix}E_r\\ A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=0.$$

证明 由定理 3,$W^0\{j_{s+1},\cdots,j_n\}=(-B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-s})S^{\mathrm{T}}=N$,$(\beta^{s+1},\beta^{s+2},\cdots,\beta^n)=(f^1,f^2,\cdots,f^n)N^{\mathrm{T}}$ 是 W^0 的一个基,$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A^{\mathrm{T}}$ 是 U 的基.

U 是 W 的子空间当且仅当 $\begin{pmatrix}\beta^{s+1}\\ \beta^{s+2}\\ \vdots\\ \beta^n\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=NA^{\mathrm{T}}=0$,即

$$(-B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-s})S^{\mathrm{T}}T\begin{pmatrix}E_r\\ A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=0.$$ □

4 和与交的坐标表示

设 U,W 分别为 n 维线性空间 V 的 r 维和 s 维子空间，在 V 的基 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 下的 Plücker 坐标分别为 $\{p^{i_1i_2\cdots i_r}\}$，$\{q^{j_1j_2\cdots j_s}\}$，$A=U\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}$，$B=W\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}$.

设 $M=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，且 $r(M)=t$，$M\begin{pmatrix}l_1,l_2,\cdots,l_t\\k_1,k_2,\cdots,k_t\end{pmatrix}$ 是 M 任一 r 阶非奇异子矩阵，则有 $U+W$ 以 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)M^{\mathrm{T}}(l_1,l_2,\cdots,l_t)$ 为基. 记 $r^{p_1p_2\cdots p_t}=\det M\begin{pmatrix}l_1,l_2,\cdots,l_t\\p_1,p_2,\cdots,p_t\end{pmatrix}$，$1\leqslant p_1,p_2,\cdots,p_t\leqslant n$，则 $r^{k_1k_2\cdots k_t}\neq 0$. 设 C 为 $t\times n$ 矩阵，C 的第 (i,j) 元为 $r^{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_tj}$，$R(M;k_1,k_2,\cdots,k_t)=\frac{1}{r^{k_1k_2\cdots k_t}}\mathrm{diag}((-1)^{t-1},\cdots,(-1)^{t-t})C$，则由定理 1，有

定理 5 $(U+W)\{k_1,k_2,\cdots,k_t\}=R(M;k_1,k_2,\cdots,k_t)$

定理 6 下列三条等价

1) $U\cap W=\{0\}$；

2) $(-B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-s})S^{\mathrm{T}}T\begin{pmatrix}E_r\\A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=M_1$ 为列满秩矩阵；

3) $(-A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-r})T^{\mathrm{T}}S\begin{pmatrix}E_s\\B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=M_2$ 为列满秩矩阵.

证明 由 U,W 地位的对称性，只证 1)，2) 等价.

若 2) 不成立，则存在 $r\times 1$ 矩阵 $X\neq 0$，使 $M_1X=0$. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)X=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A^TX$，则 $\alpha\neq 0$ 且 $\alpha\in U$.

由 $\begin{pmatrix}\beta^{s+1}\\\beta^{s+2}\\\vdots\\\beta^{n}\end{pmatrix}\alpha=(-B(j_{s+1},\cdots,j_n)^{\mathrm{T}}\vdots E_{n-s})S^{\mathrm{T}}T\begin{pmatrix}E_r\\A(i_{r+1},\cdots,i_n)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}X=M_1X=0$ 可得 $\alpha\in W$，即有 $U\cap W\neq\{0\}$，1) 也不成立.

反之，若 1) 不成立，则有非零向量 $\alpha\in U\cap W$，由上边推导，存在 $r\times 1$ 矩阵 $X\neq 0$，使 $M_1X=0$，2) 也不成立. □

设 $r(M_1)=p_1$，$r(M_2)=p_2$. 当 $p_1=r$ 时，由定理 6 可知 $p_2=s$，$U\cap W=\{0\}$. 以下设 $p_1<r$，$p_2<s$，且设 $R(M_1;k_1,k_2,\cdots,k_{p_1})=(E_{p_1}\vdots D_1)R_1^{\mathrm{T}}$，$R(M_2;l_1,l_2,\cdots,l_{p_2})=(E_{p_2}\vdots D_2)R_2^T$，则有

定理 7 1) $(U\cap W)\{i_{k_{p_1+1}},i_{k_{p_1+2}},\cdots,i_{k_r}\}=(-D_1^{\mathrm{T}}\vdots E_{r-p_1})R_1^{\mathrm{T}}A$；

2) $(U\cap W)\{j_{l_{p_2+1}},j_{l_{p_2+2}},\cdots,j_{l_s}\}=(-D_2^{\mathrm{T}}\vdots E_{s-p_2})R_2^{\mathrm{T}}B$.

证明 只证 1). 记 $R(M_1)=R(M_1;k_1,k_2,\cdots,k_{p_1})$.

由 $(E_{p_1}\vdots D_1)R_1^{\mathrm{T}}R_1\begin{pmatrix}-D_1\\E_{r-p_1}\end{pmatrix}=0$，可知 $r\times 1$ 矩阵 X 满足 $R(M_1)X=0$，当且仅当存在 $(r-p_1)\times 1$ 矩阵 Y，使 $X=R_1\begin{pmatrix}-D_1\\E_{r-p_1}\end{pmatrix}Y$.

设 $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{r-p_1})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)R_1\begin{pmatrix}-D_1\\E_{r-p_1}\end{pmatrix}$.

$\alpha \in U \cap W$ 当且仅当存在 $r \times 1$ 矩阵 X，使 $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r) X$ 且 $\begin{pmatrix} \beta^{s+1} \\ \beta^{s+1} \\ \vdots \\ \beta^{n} \end{pmatrix} \alpha = 0$，当且仅当 $M_1 X = 0$，当且仅当 $R(M_1)X = 0$，当且仅当 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) R_1 \begin{pmatrix} -D_1 \\ E_{r-p_1} \end{pmatrix} Y = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r-p_1}) Y$. 所以，$U \cap W = L(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r-p_1})$，从而 $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r-p_1})$ 是 $U \cap W$ 的基.

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{r-p_1}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) R_1 \begin{pmatrix} -D_1 \\ E_{r-p_1} \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) A^{\mathrm{T}} R_1 \begin{pmatrix} -D_1 \\ E_{r-p_1} \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)((-D_1^{\mathrm{T}} \vdots E_{r-p_1}) R_1^{\mathrm{T}} A)^{\mathrm{T}}$

由

$$((-D_1^{\mathrm{T}} \vdots E_{r-p_1}) R_1^{\mathrm{T}} A)(i_{k_{p_1+1}}, i_{k_{p_1+2}}, \cdots, i_{k_r}) = (-D_1^{\mathrm{T}} \vdots E_{r-p_1}) R_1^{\mathrm{T}} (A(i_{k_{p_1+1}}, i_{k_{p_1+2}}, \cdots, i_{k_r}))$$
$$= ((-D_1^{\mathrm{T}} \vdots E_{r-p_1}) R_1^{\mathrm{T}})(k_{p_1+1}, k_{p_1+2}, \cdots, k_r) = E_{r-p}.$$

即有 1) 成立. □

参考文献：

[1] ORLIK P, TERAO H. *Arrangements of Hyperplanes* [M]. Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] COXETER H S M. *Non-Euclidean Geometry* [M]. Univ Toronto Press, 1965, 88—90.

[3] COHU P M. *Algebra* (*Volume* 2) [M]. John Wiley & Sons, New York, 1979, 80—81.

Plücker Coordinates Representation of the Relations and Operations between Linear Subspaces

NIU Xing-wen

(Dept. of Appl. Math. & Phy., Beijing University of Chemical Technology, 100029, China)

Abstract: In this paper, we discuss the matrix representation of Plücker coordinates of subspaces. The matrix form of Plücker relations is given, and the Plücker coordinates matrix representation of the incidence relation between two subspaces, of the annihilator for a subspace, of the sum and intersection of two subspaces are derived from it.

Key words: linear subspace; Plücker coordinates; Plücker relations