级数求和RMI解题机*

王建东[1]， 徐利治[2]， 肖奚安[3]， 朱梧槚[4,1]

（1. 南京航空航天大学计算机科学与工程系，210016；2. 大连理工大学应用数学系，116023；
3. 空军气象学院数学教研室，南京 210012；4. 南京大学计算机软件新技术国家重点实验室，210093）

摘　要：本文从RMI原则出发对各种级数求和的方法进行分析，将许多幂级数归结为是由几种基本幂级数演变而来的，总结出若干适用面较广的映射算子，介绍了在此基础上实现的能对相当大一部分幂级数及数项级数求和的RMI解题机.

关键词：解题机；级数求和；关系映射反演.
分类号：AMS(1991) 00A35/CLC O143
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)01-0153-06

1 引　言

无穷级数求和一直被看作是比较困难的数学问题，需要靠经验和判断选择适当的方法来求解，有时要通过多次试探才能完成. 让计算机来解无穷级数求和的问题就更为困难. 80年代初由徐利治[1]提出的关系映射反演(RMI)方法是一种适用于数理科学与工程技术科学的普遍思想方法，带有一般的原则性，所以也可叫作"RMI原则". 我们用这一方法分析无穷级数求和的规律，总结构造了一系列映射算子，在微型计算机上实现了可对相当大一部分幂级数及数项级数求和的级数求和RMI解题机. 该解题机可在用户给出级数的通项表达式和起始项序数以后，自动求出幂级数的和函数或数项级数的和.

2 映射方法

级数求和的方法繁多. 如利用各种技巧直接求级数的和、利用欧拉公式求和、对级数进行和积运算、利用已知级数的和、利用幂级数的基本展开式、利用幂级数的逐项微分和逐项积分、利用傅里叶级数等[2]. 这些方法都没有固定的操作程序而需要靠经验进行判断并采用各种技巧进行操作. 正因为如此，文[2]指出，在碰到级数求和问题时，"不要急于用某个方法去套，而应将你掌握的多种求和法，按方法的先易后难去试探，而不要轻易用难的方法去试." 但是，为了要在计算机上实现级数求和，必须采用较为规范、普遍适用的算法. 为此，我们从RMI原则出发对各种级数求和的方法进行分析，总结出若干适用面较广的映射算子，通过映射、定映、反演的过程，完成级数求和，实现了级数求和RMI解题机.

* 收稿日期：1998-04-02；修订日期：2000-01-13
E-mail: jdwang@jlonline.com

1. 配幂映射

数项级数千变万化，但其中有很多级数可以通过配幂的方法变成可以求和的幂级数，在求得幂级数的和函数后，再根据阿贝尔定理求出该和函数在某点的极限值即为原数项级数的和.

2. 积分映射

对幂级数先进行逐项积分，将其化简成某种基本幂级数的形式，求得该基本幂级数的和函数后，再对其求导，即可得到原幂级数的和. 有的幂级数需要经过多次积分映射才能化简为基本幂级数，那么在反演时相应地就要进行多次求导才得到原幂级数的和.

3. 微分映射

与上面的过程相反，首先对幂级数逐项求导，将其化简成某种基本幂级数的形式，求得该基本幂级数的和函数后，再对其积分，即得原幂级数的和.

4. 代换映射

由于基本级数的形式一般比较简单，而需要求和的级数是多种多样的，故在化简的过程中通常都要通过代换映射来使其形式与基本级数匹配，在得到结果后再通过反代换得到原级数的和.

3　级数求和机工作原理

首先，让我们来看两种类型的幂级数求和的例子.

1. 例一：求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(n)X^b$，其中 $P(n)$ 为 n 的 m 次多项式，b 为 n 的一次式. 令

$$P(n)=k_mb(b-1)(b-2)\cdots(b-m+1)+k_{m-1}b(b-1)(b-2)\cdots(b-m+2)+\cdots+k_1b+k_0, \tag{1}$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)X^b=k_m\sum_{n=0}^{\infty}b(b-1)(b-2)\cdots(b-m+1)X^b+k_{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}b(b-1)(b-2)\cdots(b-m+2)X^b+\cdots\cdots+k_1\sum_{n=0}^{\infty}bX^b+k_0\sum_{n=0}^{\infty}X^b. \tag{2}$$

上式右边第一项 $=k_mX^m\sum\limits_{n=0}^{\infty}b(b-1)(b-2)\cdots(b-m+1)X^{b-m}$. 对其和式部分经过 m 次逐项积分映射得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X^b$.

设 $b=cn+d$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}X^b=X^d\sum\limits_{n=0}^{\infty}X^{cn}$. 通过代换映射 $X=Y^{\frac{1}{c}}$ 得 $Y^{\frac{d}{c}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}Y^n=\frac{Y^{\frac{d}{c}}}{1-Y}$. 通过反代换 $Y=X^c$ 得 $\frac{X^d}{1-X}$.

对上面的结果求 m 阶导数即得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b(b-1)(b-2)\cdots(b-m+1)X^{b-m}$ 的和函数. 同样可求出其它各项的和函数(分别经过 $m-1$ 次，$m-2$ 次，…，1 次，0 次积分映射).

2. 例二：求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P(n)}X^e$，其中 $P(n)$ 为能够分解成 n 的一次因式的积的 m 次多项式，e 为 n

的一次式.令

$$\frac{1}{P(n)}=\frac{k_1}{a_1n+b_1}+\frac{k_2}{a_2n+b_2}+\cdots+\frac{k_m}{a_mn+b_m},\quad a_i,b_i,k_i\text{ 为常数},\tag{3}$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P(n)}X^e=k_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_1n+b_1}X^e+k_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_2n+b_2}X^e+\cdots+k_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_mn+b_m}X^e.\tag{4}$$

设 $e=cn+d$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{X^{cn+d}}{an+b}$ 通过代换映射 $X=Y^{\frac{a}{c}}$ 变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{Y^{an+ad/c}}{an+b}=Y^{\frac{ad}{c}-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{Y^{an+b}}{a\,n+b}$.

通过微分映射,对和式部分逐项求一阶导数得(和式部分):

$$\sum_{n=0}^{\infty}Y^{an+b-1}=Y^{b-1}\sum_{n=0}^{\infty}Y^{an}=\frac{Y^{b-1}}{1-Y^a}.$$

对上式右边的和函数积分即得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{Y^{an+b}}{an+b}$,再通过反代换可求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{X^{cn+d}}{an+b}$,故(4)式右边的每一项都可求出其和函数.

由上面的两个例子可以看出,通过映射,可以把许多幂级数求和的问题化简为求最简单的幂级数的和的问题.级数求和机正是从一些基本级数出发,总结出一些适用于级数求和的映射方法,将各种各样的级数分门别类地通过映射变换成这些基本级数,在求出这些基本级数的和后再通过反演得到原来级数的和.这是一种典型的 RMI 方法[3].

4 级数求和 RMI 解题机的构成

根据上一节提出的原理,级数求和机由预处理机、映射机、定映机、反演机四部分组成.

1.预处理机

预处理机主要有两个功能.首先,它对用户输入的级数通项进行收敛性判别处理,即对数项级数检查其是否收敛,若不收敛,则给出提示信息,停止计算,否则继续求和;对幂级数则计算其收敛域,并将计算结果告诉用户.第二,它对级数通项进行必要的等价数学变换,如将 n 的 m 次多项式 $P(n)$ 化为(1)式的形式,或将 $1/P(n)$ 化为(3)式的形式,以便映射机采取适当的映射方法将原级数转化为基本级数的形式.

2.映射机

映射机根据预处理机输出的级数通项类型,分别采取适当的配幂、积分、微分、代换映射算子对其进行化简,一般要通过多次映射才能逐步将其化简为基本级数的形式.为了以后能通过相应的逆映射求得原级数的和,映射机还要记住所应用的映射算子及映射次数和顺序.

3.定映机

定映机实际上就是一张基本幂级数表.定映机根据映射机得到的基本级数查表,即得到基本级数的和.将大约二十个基本幂级数归纳成六种类型,通过关系映射反演方法可以解决三十六大类幂级数及相应的数项级数求和问题.

4.反演机

反演机根据映射机采取的映射算子对定映机给出的基本幂级数的和通过对应的逆映射运算得到原来要求的级数的和,并对所得的结果作适当的化简.

5　级数求和 RMI 解题机的主要功能

解题机的主要功能如下：

1. 在用户输入无穷级数的通项表达式和起始项数后，不需任何人工干预，首先对所给级数的收敛性和收敛域作简单的分析，然后对能求和的级数迅速给出和的精确解，否则给出不能求和的提示.

2. 除了以 n 代表项数、以 x 表示幂级数的变量外，对输入表达式的形式没有特殊要求，符合一般数学表达式的书写习惯，便于使用.

3. 能解的幂级数求和问题的类型如下：

○ 基本型 1：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$.

○ 基本型 2：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}x^n=e^{-x}$.

○ 基本型 3：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=Sh\ x$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$.

○ 基本型 4：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=Ch\ x$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x$.

○ 基本型 5：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n=a^x$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n=a^{-x}$.

○ 基本型 6：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n=(1-x)^{-1/2}$；　　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n=(1+x)^{-1/2}$.

对每一种基本型我们都可以将其推广为一大类幂级数，这类幂级数可以通过映射变换成该基本型来求和. 如前面的例一和例二所表示的两大类幂级数的求和问题都是通过变换成基本型 1 来求解的. 实际上在基本型 1 的基础上可求解下列三类幂级数的求和问题：

○ 推广型 1.1 $\sum\limits_{n=i}^{\infty}P(n)x^b$；　　$\sum\limits_{n=i}^{\infty}(-1)^c P(n)x^b$，

其中 $P(n)$ 为 n 的多项式，i 为非负整数，b 和 c 为 n 的一次式.

○ 推广型 1.2 $\sum\limits_{n=i}^{\infty}\frac{1}{P(n)}x^b$；　　$\sum\limits_{n=i}^{\infty}(-1)^c\frac{1}{P(n)}x^b$，

其中 $P(n)$ 为能够分解成 n 的一次因式的积的多项式，i 为非负整数，c 和 b 为 n 的一次式.

○ 推广型 1.3 $\sum\limits_{n=i}^{\infty}\frac{P_1(n)}{P_2(n)}x^b$；　　$\sum\limits_{n=i}^{\infty}(-1)^c\frac{P_1(n)}{P_2(n)}x^b$，

其中 $P_1(n)$ 为 n 的多项式，$P_2(n)$ 为能够分解成 n 的一次因式的积的多项式，i 为非负整数，c 和 b 为 n 的一次式.

实际上，对于其他五种基本型的每一种都类似地有三种推广型，这样一共有 18 种推广型，若把正项级数和交错级数分开，则有 36 类幂级数. 这 36 类幂级数通项的分母中增加 d^{kn+j} 因子，其中 d,k,j 均为整数，也可以通过代换映射求和. 而将每种类型中的 x 换为 $kx+j$，其中 k，j 为整数，亦可通过代换求和. 这样所得到的 36 大类幂级数中的大部分级数均可用该 RMI 解题机求和，其中少数幂级数由于在使用微积分算子进行映射或反演时出现不可解的问题，从而

求不出和.这些幂级数有一部分本来就是无法求和的.

4. 可以求能通过配幂映射变成上述可求和的幂级数的收敛的数项级数的和.

5. 可以求 14 类三角级数的和.

6 运行实例

在这里,通过级数求和 RMI 解题机的一个简单的运行实例,来进一步说明解题机的工作过程和原理.其中每一行分号之前是系统输入输出的信息,分号之后是说明.解题机在实际运行时只是接受用户的输入,通过计算后,输出最终结果,并不给出中间结果.这里,为了说明其运行过程,故特意让系统输出一些中间结果.

Nsgm[(-1)^ n n/(2n+1)!,0]　;用户输入命令:求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)!}$.

Sigma[((-1)^ n*n*x^ n)/(1+2*n)!,0]　;配幂映射:先求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n+1)!}X^n$.

1/2*Sigma[((-1)^ n*x^ n)/(2*n)!,1]-1/2*Sigma[((-1)^ n*x^ n)/(1 + 2*n)!,1]

;将 n 展开成 $(2n+1)$ 的多项式 1/2*(2n+1)-1/2,故上式变成 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}X^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}X^n$.

-sin[x^ (1/2)/2]^ 2-(-1+sin[x^ (1/2)]/x^ (1/2))/2

;通过代换映射将上式化为基本型 4 和 3,经查表求得其和,再通过反代换即得上面两级数的和.

Simplify[-sin[x^ (1/2)/2]^ 2-(-1+sin[x^ (1/2)]/x^ (1/2))/2]

;对上述结果化简.

cos[x^ (1/2)]/2-sin[x^ (1/2)]/(2*x^ (1/2));化简的结果.

Limit[cos[x^ (1/2)]/2-sin[x^ (1/2)]/(2*x^ (1/2)),x->1]

;求幂级数的和函数在 x->1 时的极限.

$\frac{\cos[1]-\sin[1]}{2}$　;根据阿贝尔定理,此极限即所求数项级数的和

此即系统对用户输入的命令给出的结果.

7 讨 论

级数求和 RMI 解题机,是我们在研制成功常系数线性微分方程 RMI 解题机[5]后取得的又一成果.常系数线性微分方程 RMI 解题机主要利用拉普拉斯变换解微分方程的初值问题,所采用的映射算子比较单纯,解题步骤比较规范,因而在计算机上较容易实现.而级数求和机所采用的映射算子比较多,而且在求解过程中需要采用哪些映射、要进行几次映射对每个问题是不同的.为了能在机器上实现,我们将许多幂级数归结为是由几种基本幂级数演变而来的,从而能用统一的算法将它们化归成基本幂级数加以求解.而这种归结正是根据 RMI 原则进行的,从 RMI 原则出发,我们在繁杂的级数求和问题中发现了规律,找到了共性,使本来很困难、灵活性很大的级数求和问题能够依靠计算机加以解决.因此,级数求和机的构造成功,进一步

证明了 RMI 方法的强大生命力.

在级数求和机中我们主要解决如何求和的问题,对于无穷级数的收敛性判别及收敛区间的计算只作了初步的考虑.解题机只根据级数收敛的必要条件、拉北判别法和幂级数收敛半径的基本计算公式作简单的判别和计算,对这些方法不能解决的问题则没有进一步考虑.

参考文献:

[1] 徐利治. 数学方法论选讲 [M]. 武汉:华中工学院出版社,1983.
HSU L C. *Selected Topics in Mathematical Methodology* [M]. Huazhong Institute of Technology Press, 1983.

[2] 张亚军. 高等数学复习讲座 [M]. 大连工学院出版社,1988.
ZHANG Ya-jun. *Reviews of Advanced Mathemaics* [M]. Dalian Institute of Technology, Press, 1988.

[3] 徐利治,郑毓信. 关系映射反演方法,数学方法论丛书 [M]. 南京:江苏教育出版社,1988.
HSU L C, ZHENG Yu-xin. *Relation-mapping-inversion Method*, *Mathematical Methodology Series* [M]. Jiangsu Educational Press, 1988.

[4] 吉米多维奇. 数学分析习题集题解(四) [M]. 山东科学技术出版社, 1980.
Kimodovic. *Solutions to Problems in Mathematical Analysis* (4) [M]. Shandong Science and Technology Press, 1980.

[5] 王建东,朱梧槚,肖奚安,等. 常系数线性微分方程 RMI 解题机 [J]. 数学研究与评论,1996, 3: 471—476.
WANG Jian-dong, ZHU Wu-jia, XIAO Xi-an, et al. *RMI Solver for constant coefficient linear differential equations* [J]. J. of Math. Res. and Expo., 1996, 3: 471—476.

RMI Solver for Summering Series

WANG Jian-dong[1], HSU L. C[2], XIAO Xi-an[3], ZHU Wujia[1,4]

(1. Dept. of Computer Science & Engineering, NUAA, China;
2. Dept. of Math., Dalian University of Technology, 116024, China;
3. Division of Mathematics, Meteorological Institute of Chinese Air Force, 210012, China;
4. National Major Laboratory of New Software Technology, Nanjing University, 210093, China)

Abstract: Based on the principle of RMI this paper analyzes various methods for summering series , sums up many power series into several sorts which are evolved from several simple power series, and presents some mapping operators. On this basis an RMI solver which can sum a large apart of the power series and numerical series is proposed.

Key words: solver; summing series; relation-mapping-inversion.