第21卷第2期
2001年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 21 No. 2
May 2001

Orlicz空间的近端点和近严格凸性*

计东海[1]，王廷辅[1]，滕岩梅[2]
(1. 哈尔滨理工大学，黑龙江 哈尔滨 150080；2. 厦门大学，福建 厦门 361005)

摘 要：本文给出了Orlicz函数空间中近端点的判别准则，近而推出了Orlicz函数空间近严格凸性的判别准则. 另外，本文还直接给出了Orlicz序列空间近严格凸的判别准则.

关键词：近端点；近严格凸；Orlicz空间.
分类号：AMS(1991) 46B20,46E30/CLC O177.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0229-08

1988年，Sekowski和Stachura[2]引进了近严格凸的概念. Banach空间X称为是近严格凸的是指其单位球面$S(X)$上每一点皆为近端点. $x \in S(X)$称为是近端点是指$S(X)$上不存在包含x的非紧闭凸子集. 换言之，X是近严格凸的充分必要条件是$S(X)$的每个凸子集都是相对紧的. 1997年南朝勋和宋寿柏[3]得到了一个有趣的结果：X是近严格凸的充要条件是X的一切子空间E都是紧-半-Chebyshev的，意即对任何$x \in X$，$P_E(x)$是紧集(空集也看作是紧集). 这一结果表明近严格凸是k-严格凸[1]的推广.

本文将在Orlicz空间框架之下讨论近端点和近严格凸的刻划. 在本文中以X表示一个Banach空间，X^*，$S(X)$，$B(X)$分别表示X的对偶空间，单位球面及闭单位球. 对于$x \in X$，记$\Gamma_{(x)} = \{f \in S(X^*): f(x) = \|x\|\}$. 对于$f \in S(X^*)$，记$A_f = \{x \in S(X): f(x) = 1\}$. 本文结果除其本身具有应用价值之外，还为比较近端点与端点，近严格凸性与严格凸性的强弱提供了具体的空间实例.

本文以$M(u)$，$N(v)$表示一对互余的N-函数，$p(u)$，$q(v)$分别表示$M(u)$与$N(v)$的右导数，$\{(a_i,b_i)\}$表示$M(u)$所有仿射区间的全体. 在处理Orlicz函数空间问题时"$M \in \triangle_2$"表示$M(u)$对较大的u满足$\triangle_2$条件. 在处理Orlicz序列空间问题时"$M \in \triangle_2$"则表示$M(u)$对较小的u满足$\triangle_2$条件. "$M \in \nabla_2$"是指"$N \in \triangle_2$"设(G,Σ,μ)是有限，无原子的完备测度空间. L°表示定义在G上的实值Σ-可测函数的全体(几乎处处相同的元视为同一个元). m表示所有实数列的全体. 泛函$\rho_M(x) = \int_G M(x(t))\mathrm{d}\mu, x \in L^\circ$与泛函$\rho_M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M(x_i), x \in m$分别定义了$L^\circ$与$m$上的模函数. 记

* 收稿日期：1998-02-11；修订日期：1999-11-15
基金项目：国家及黑龙江省自然科学基金资助项目(19871020)
作者简介：计东海(1964-)，男，博士，教授.

$$L_M = L_M(G,\Sigma,\mu) = \{x \in L^\circ : \exists\, c > 0, \text{使得 } \rho_M(\frac{x}{c}) < \infty\},$$

$$E_M = \{x \in L_M : \forall\, c > 0, \rho(\frac{x}{c}) < \infty\},$$

$$l_M = \{x \in m : \exists\, c > 0, \rho_M(x/c) < \infty\},$$

$$h_M = \{x \in m : \forall\, c > 0, \rho_M(x/c) < \infty\}.$$

L_M 上可赋以 Luxemburg 范数 $\|x\|_M = \inf\{c > 0 : \rho_M(x/c) \leqslant 1\}$ 与 Orlicz 范数

$$\|x\|^\circ_M = \sup\{\int_G x(t)y(t)\mathrm{d}\mu : \rho_N(y) \leqslant 1\} = \inf\{\frac{1}{k}(1 + \rho_M(kx)) : k > 0\},$$

并记 $L_M = (L_M, \|\cdot\|_M), L^\circ_M = (L_M, \|\cdot\|^\circ_M)$.

称 $\varphi \in (L_M)^*$(或 l_M^*)是奇异泛函是指 $\varphi(E_M) = \{0\}$(或 $\varphi(h_M) = \{0\}$),此时记 $\varphi \in F$. 对于 $x \in L_M$(或 $x \in l_M$),记

$$K_M(x) = \{\, k > 0 : \|x\|^\circ_M = \frac{1}{k}(1 + \rho_M(kx))\},$$

$$Q_M(x) = \inf\{\, c > 0 : \rho_M(x/c) < \infty\} = \lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|^\circ_M = \lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|_M,$$

其中 $x_n(t) = \begin{cases} x(t), |x(t)| \leqslant n, \\ 0, |x(t)| > n. \end{cases}$

本文将要用到如下已知结果:

引理 1[4] $x \in L_M$(或 l_M)则存在 $\varphi \in F$ 使得 $\|\varphi\| = 1$ 且 $\varphi(x) = Q_M(x)$.

引理 2[4] 若 $x \in S(L_M), Q_M(x) < 1$,则 $\Gamma_{(x)} \subset S(L^\circ_N)$.

引理 3[4] 若 $x \in S(L_M)$. $f = y + \varphi \in \Gamma_{(x)}$ 的充分必要条件是(i)$\rho_M(x) = 1$;(ii)$\|\varphi\| = \varphi(x)$;(iii) $x(t)y(t) \geqslant 0, p_-(|x(t)|) \leqslant k|y(t)| \leqslant p(|x(t)|)$ (a.e. 于 G),其中 $k \in K_N(y)$.

引理 4[4] 若 $x \in S(L^\circ_M), Q_M(kx) < 1$,则 $\Gamma_{(x)} \subset S(L_N)$,其中 $k \in K_M(x)$.

本文所用符号的意义除非特别指明均与[4]中相同. 为方便起见,我们将应用[3]中给出的近端点的一个等价描述.

命题([3]Th.1) X 是 Banach 空间,$x \in S(X)$,x 是 $B(X)$ 的近端点的充分必要条件是对任何 $f \in \Gamma_{(x)}$,集合 $A_f = \{y \in S(X) : f(y) = 1\}$ 是紧集.

定理 1 $x \in S(L_M)$. x 是近端点的充要条件是:(i) $Q_M(x) < 1$;

(ii) $\mu\{t \in G : x(t) \in \bigcup_i (a_i, b_i)\} = 0$;

(iii) $\mu\{t \in G : x(t) \in \bigcup_i a_i\} \cdot \mu\{t \in G : x(t) \in \bigcup_i b_i\} = 0$.

证明 必要性. 如(i)不真,$Q_M(x) = 1$. 则有 $\varphi \in F, 1 = \|\varphi\| = \varphi(x) = Q_M(x) = \|x\|_M$,即 $\varphi \in \Gamma_{(x)}$. 记 $G_n = \{t \in G : |x(t)| > n\}$,则因 $\|x|_{G_0}\|_M = 1$,有 $n_1 > 0$ 使 $\|x|_{G_0\setminus G_{n_1}}\|_M > \frac{1}{2}$. 又因为 $\|x|_{G_{n_1}}\|_M = 1$,有 $n_2 > n_1$,$\|x|_{G_{n_1}\setminus G_{n_2}}\|_M > \frac{1}{2}$. 重复这一过程可得一正数列 $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$,使得 $\|x|_{G_{n_k}\setminus G_{n_{k+1}}}\|_M > \frac{1}{2} (k = 0,1,2,\cdots)$. 显然 $x|_{G_{n_k}} \in A_\varphi$,但任给 $k < m$ 恒有 $\|x|_{G_{n_k}\setminus G_{n_m}}\|_M \geqslant \|x|_{G_{n_k}\setminus G_{n_{k+1}}}\|_M > \frac{1}{2}$. 故有$\{x|_{G_{n_k}} : k = 0,1,2,\cdots\} \subset A_\varphi$ 非紧. 矛盾.

如(ii)不真，存在 $M(u)$ 的仿射区间 $[a,b]$ 使得集合 $\{t\in G: x(t)\in(a,b)\}$ 为正测度集. 取 $\varepsilon>0$ 使得集合 $E=\{t\in G: x(t)\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\}$ 仍为正测度集. 将 E 分为 $E_1^1, E_2^1, E_1^1\cap E_2^1=\varnothing, E_1^1\cup E_2^1=E, \mu E_1^1=\mu E_2^1$；将 E_1^1, E_2^1 分别分为 E_1^2, E_2^2 和 E_3^2 和 $E_4^2, E_1^2\cup E_2^2=E_1^1, E_1^2\cap E_2^2=\varnothing, \mu E_1^2=\mu E_2^2$；$E_3^2\cup E_4^2=E_2^1, E_3^2\cap E_4^2=\varnothing, \mu E_3^2=\mu E_4^2\cdots$，一般地将 E_i^{n-1} 分为 E_{2i-1}^n 和 E_{2i}^n，$E_{2i-1}^n\cup E_{2i}^n=E_i^{n-1}, E_{2i-1}^n\cap E_{2i}^n=\varnothing$，且有 $\mu E_{2i-1}^n=\mu E_{2i}^{n-1}(n=1,2,\cdots\cdots; i=1,2,\cdots\cdots,2^{n-1})$. 置 $x_n(t)=x(t)|_{G\setminus E}+(x(t)-\varepsilon)|_{\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}E_{2i-1}^n}+(x(t)+\varepsilon)|_{\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}E_{2i}^n}(n=1,2,\cdots)$. 则

$$\begin{aligned}\rho_M(x_n)&=\rho_M(x|_{G\setminus E})+\rho_M(x|_{\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}E_{2i-1}^n})-\varepsilon p(a)\frac{\mu E}{2}+\rho_M(x|_{\bigcup\limits_{i=1}^{2^{n-1}}E_{2i}^n})+\varepsilon p(a)\frac{\mu E}{2}\\&=\rho_M(x)=1.\end{aligned}$$

故有 $\|x_n\|_M=1$. 令 $z(t)=p_-(x(t))|_{G\setminus E}+p(a)|_E$，则 $y(t)=\dfrac{z(t)}{\|z(t)\|^\circ_N}\in\Gamma_{(x)}$. 容易证明 $\langle x_n,y\rangle=1$，即 $(x_n)\subset A_y$. 但 $m\neq n$ 时，有 $\|x_m-x_n\|_M=2\varepsilon\dfrac{1}{M^{-1}(2/\mu E)}$，即 A_y 非紧.

如 iii) 不真，仿 ii) 的必要性证明方法亦能导致矛盾.

充分性. 无碍一般性，设 $x(t)\geqslant 0$(a. e.). 由 i) 知 $\Gamma_{(x)}\subset S(L^\circ_N)$. 任取 $y\in\Gamma_{(x)}, k\in K_N(y)$，则 $p_-(x(t))\leqslant ky(t)\leqslant p(x(t))$(a. e.)

现分两种情况证明

Ⅰ. $\mu\{t\in G: x(t)\in\bigcup\limits_i(b_i)\}=0$. 若 $w\in A_y$，则 $y\in\Gamma_{(w)}$. 故 $p_-(w(t))\leqslant ky(t)\leqslant p(w(t))$. 如果 $x(t)\neq a_i(i=1,2,\cdots)$. 则由 $p_-(w(t))\leqslant p(x(t))$ 和 $p_-(x(t))\leqslant p(w(t))$ 可知 $x(t)=w(t)$. 如果 $x(t)=a_i$ 则因 $x(t)\neq b_j(j=1,2,\cdots)$，故必有 $w(t)\geqslant x(t)$，综上有 $w(t)\geqslant x(t)$(a. e.). 但 $\rho_M(w)\leqslant 1=\rho_M(x)$，故 $w(t)=x(t)$(a. e.). 这表明 A_y 是单点集，自然是紧集.

Ⅱ. $\mu\{t\in G: x(t)\in\bigcup\limits_i(a_i)\}=0$. 证法与情形 Ⅰ 类似，从略.

应用定理 1 容易推出如下结果

推论 1 L_M 是近严格凸的充分必要条件是 $M\in\Delta_2\cap S_C[0,\infty)$.

注 1 由[4]Th. 2. 00，L_M 的近端点真强于暴露点，当然也真强于端点；又由[4]中 Th. 2. 2，L_M 的近似严格凸等价于严格凸.

以下 $\{a_i'\},\{b_i'\}$ 分别表示 $M(u)$ 的仿射区间满足条件 $p_-(a_i')=p(a_i), p_-(b_i')=p(b_i)$ 的所有左、右端点的集合，$\{a_i''\},\{b_i''\}$ 分别是 $M(u)$ 的仿射区间满足条件 $p_-(a_i'')<p(a_i''), p_-(b_i'')<p(b_i'')$ 的所有左、右端点的集合.

定理 2 $x\in S(L^\circ_M)$，x 是近端点的充要条件是对 $k\in K_M(x)$.

(i) $\mu\{t\in G: |kx(t)|\in\bigcup\limits_i(a_i,b_i)\}=0$；

(ii) $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup\limits_i(a_i')\cup(b_i')\}=0$；

(iii) 若 $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup\limits_i(a_i'')\}>0$，则 $\rho_N(p_-(kx))=1$；

(iv) 若 $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup\limits_i(b_i'')\}>0$，则 $\rho_N(p(kx))=1$ 且 $Q_M(kx)<1$.

证明 不妨设 $x(t)\geqslant 0$ (a. e.). 充分性，分如下三种情况：

Ⅰ. $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup\limits_i(a_i'')\}>0$. 由条件(iii)，$\rho_N(p_-(kx))=1$.

由[4]中Th. 2. 51，x是光滑点. 再从[4]Th. 2. 61，x是暴露点. 因而A_y中只含x一点，自然是紧集.

Ⅱ. $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup_i(b_i^*)\}>0$. 由条件(iv)，$\rho_N(p(kx))=1$且$Q_M(kx)<1$. 再由[4]Th. 2. 51和[4]Th2. 61知x是光滑点和暴露点，故为近端点.

Ⅲ. $\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup_i(a_i^*)\}=\mu\{t\in G: |x(t)|\in\bigcup_i(b_i^*)\}=0$.

联系条件(i)，(ii)，$kx(t)\in R\setminus\bigcup_i[a_i,b_i]$(a. e). 任取$f=y+\varphi\in\Gamma_{(x)}$，由[4]Th1. 71，$y\neq 0$，且由[4]Th. 1. 77有$p_-(kx(t))\leqslant y(t)\leqslant p(kx(t))$.

任取$z\in A_f$，则$p_-(hz(t))\leqslant y(t)\leqslant p(hz(t))$(a. e). 其中$h\in K_M(z)$. 由$p_-(hz(t))\leqslant p(kx(t))$及$p(hz(t)\geqslant p_-(kx(t))$得到$hz(t)=kx(t)$(a, e). 从$h=\|hz(t)\|^\circ_M=\|kx(t)\|^\circ_M=k$，立刻得到$z=x$. 即$A_f$仅含$x$一点.

必要性　如(i)不真，有(a,b)使$\mu\{t\in G:kx(t)\in(a,b)\}>0$. 取$\varepsilon>0$使$E=\{t\in G:kx(t)\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\}$为正测度集. 将$E$做如定理1的累次划分，置

$$x_n(t)=x(t)|_{G\setminus E}+(x(t)+\frac{\varepsilon}{k})|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i-1}+(x(t)-\frac{\varepsilon}{k})|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i}$$

易见$\rho_N(p_-(kx_n))\leqslant\rho_N(p_-(kx))\leqslant 1$. 对较小的$\eta>0$，有$\rho_N(p((1+\eta)kx_n))\geqslant\rho_N(p((1+\eta)kx))\geqslant 1$. 故有$k\in K_M(x_n)$. 因此

$$\begin{aligned}\|x_n\|^\circ_M&=\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx_n))\\&=\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx|_{G\setminus E})+\rho_M(kx|_E)+p(a)\frac{\varepsilon}{k}\frac{\mu E}{2}-p(a)\frac{\varepsilon}{k}\frac{\mu E}{2})\\&=\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx))=\|x\|^\circ_M=1\quad(n=1,2,\cdots\cdots).\end{aligned}$$

任取$f=y+\varphi\in\Gamma_{(x)}$，则$t\in E$时$y(t)=p(kx(t))=p(a)=p(kx_n(t))$；$t\in G\setminus E$时，$p_-(kx_n(t))=p_-(kx(t))\leqslant y(t)\leqslant p(kx(t))=p(kx_n(t)$；又$\|\varphi\|=\varphi(kx)=\varphi(kx_n)$. 因此$f\in\Gamma_{(x_n)}$，即$x_n\in A_f(n=1,2,\cdots)$. 但$m\neq n$时，$\|x_n-x_m\|^\circ_M=\frac{2\varepsilon}{k}\frac{\mu E}{2}N^{-1}(\frac{2}{\mu E})$，即$\{x_n\}$非紧，与$x$是近端点矛盾.

如(ii)不真，则有a'，使$\mu E=\mu\{t\in G:kx(t)=a'\}>0$. 取$c>a'$，$p(c)=p(a')$. 将$E$作累次划分，置$z_n=x(t)|_{G\setminus E}+\frac{a'}{k}|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i-1}+\frac{c}{k}|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i}$，则$\rho_N(p_-(kz_n))=\rho_N(p_-(kx))\leqslant 1$. 对$\eta>0$，有$\rho_N(p((1+\eta)kz_n))\geqslant\rho_N(p((1+\eta)kx))\geqslant 1$. 故$k\in K_M(z_n)$. 令$\|z_n\|^\circ_M=\gamma(n=1,2,\cdots)$，$x_n=\frac{z_n}{\gamma}$，则有$\|x_n\|^\circ_M=1$且$k\gamma\in K_M(x_n)$. 任取$f=y+\varphi\in\Gamma_{(x)}$，易知$f\in\Gamma_{(x_n)}$，即$x_n\in A_f(n=1,2,\cdots)$. 但$m\neq n$时$\|x_m-x_n\|^\circ_M=\frac{(c-a')}{k\gamma}\frac{\mu E}{2}N^{-1}(\frac{2}{\mu E})$. 由此推出$\{x_n\}\subset A_f$非紧，矛盾.

如(iii)不真，则$\mu E=\{t\in G:kx(t)=a''\}>0$，且$\rho_N(p_-(kx))<1$. 取$E$的子集(仍记为$E$)满足$\rho_N(p_-(kx)|_{G\setminus E})+N(p(a''))\mu E<1$. 若$\rho_N(p(kx))\geqslant 1$，则有$y\in\Gamma_{(x)}$，$y(t)=p(a'')(t\in E)$；若$\rho_N(p(kx))<1$，则有$f=y+\varphi\in\Gamma_{(x)}$，$y(t)=p(a'')(t\in E)$. 故不妨认为后者成立. 取$c>a''$，$p(a'')=p(c)$，与前面相同，设$x_n=\frac{z_n}{\gamma}$，$\gamma=\|z_n\|^\circ_M$，其中$z_n(t)=$

$x(t)|_{G\setminus E}+\frac{a''}{k}\left|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i-1}+\frac{c}{k}\right|\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}}E^n_{2i}$. 则可证明 $f\in\Gamma_{(x_n)}$，即 $x_n\in A_f$.

但 $m\neq n$ 时 $\|x_m-x_n\|^\circ_M=\frac{(c-a')}{k\gamma}\frac{\mu E}{2}N^{-1}(\frac{2}{\mu E})$，与 A_f 列紧矛盾.

(iv) 的证法可仿照(iii) 的必要性证明导出矛盾.

由定理 2 容易推出如下结果

推论 3 L°_M 是近严格凸的充分必要条件是 $M\in S_C[0,+\infty)$.

注 2 由[4]Th2.61 知 L°_M 的近端点等价于暴露点，故真强于端点；由[4]Th.2.4，L°_M 的近严格凸等价于严格凸.

关于 Orlicz 序列空间，我们只给出近严格凸的判别准则.

定理 3 l_M 近严格凸的充要条件是(i)$M\in\Delta_2$；(ii) $\limsup\limits_{b_i\to 0}\sup\limits_i\frac{b_i}{a_i}<\infty$. 此处$[a_i,b_i]$为 $M(u)$ 的仿射区间.

证明 *必要性* 如 $M\notin\Delta_2$，可以构造 $x\in S(l_M)$，$Q_M(x)=1$. x 有支撑泛函 $\varphi\in F$. 取 $i_1<i_2<\cdots$，使 $\|0,\cdots,0,x(i_n+1)\cdots x(i_{n+1}),0,\cdots)\|_M>\frac{1}{2}$ 考察 $x_n=(0,\cdots,0,x(i_n+1),x(i_n+2),\cdots)$. 显然 $\{x_n\}\subset A_\varphi$，但 $m\neq n$ 时，$\|x_m-x_n\|>\frac{1}{2}$，即 $\{x_n\}$ 非紧.

如(ii) 不真，有 $M(u)$ 的仿射区间$[a_j,b_j]$，$M(b_j)<\frac{1}{2^{j+1}}$，$b_j>2^{j+1}a_j(j=1,2,\cdots)$. 取正整数 m_j，使$\frac{1}{2^{j+1}}<m_jM(a_j)\leqslant\frac{1}{2^j}(j=2,3,\cdots)$ 和 $\frac{1}{4}<m_1M(b_1)\leqslant\frac{1}{2}$. 取 $c_0\geqslant 0$，$M(c_0)+m_1M(b_1)+\sum\limits_{j>1}m_jM(a_j)=1$. 置 $x=(c_0,\overbrace{b_1,\cdots,b_1}^{m_1},\overbrace{a_2,\cdots,a_2}^{m_2},\overbrace{a_3,\cdots,a_3}^{m_3},\cdots,)$，则 $\rho_M(x)=1$，即 $x\in S(l_M)$. 对任何 $j\geqslant 2$

$$m_j(M(b_j)-M(a_j))>(2^{j+1}-1)m_jM(a_j)>1-\frac{1}{2^j}$$
$$\geqslant\frac{3}{4}>m_1M(b_1)>m_1(M(b_1)-M(a_1)).$$

取 $c_j\in(a_j,b_j)$，使 $m_j(M(c_j)-M(a_j))=m_1(M(b_1)-M(a_1))$. 置

$$x_j=(c_0,\overbrace{a_1,\cdots,a_1}^{m_1},\overbrace{a_2,\cdots,a_2}^{m_2},\cdots,\overbrace{a_{j-1},\cdots,a_{j-1}}^{m_{j-1}},\overbrace{c_j\cdots,c_j}^{m_j},\overbrace{a_{j+1},\cdots,a_{j+1}}^{m_{j+1}},\cdots),$$

则 $\rho_M(x_j)=\rho_M(x)=1$. 即 $x_j\in S(l_M)(j=2,3,\cdots)$. 取

$$z=(p(c_0),\overbrace{p(a_1),\cdots,p(a_1)}^{m_1},\overbrace{p(a_2),\cdots,p(a_2)}^{m_2},\cdots),y=\frac{z}{\|z\|^\circ_N}.$$

易知 $y\in\Gamma_{(x)}$ 且 $\{x_n\}\subset A_y$. 但 $i<j$ 时

$$\|x_j-x_i\|_M\geqslant\|(0,\cdots,0,\overbrace{c_j-a_j,\cdots,c_j-a_j}^{m_j},0,\cdots)\|_M.$$

而 $m_j(M(c_j)-M(a_j))=m_1(M(b_1)-M(a_1))$. 由 $M\in\Delta_2$，存在 $\alpha>0$，$m_jM(c_j-a_j)>\alpha$，更有 $\|x_j-x_i\|_M>\alpha$. 这表明$\{x_j\}$ 非紧.

充分性 对任意的 $x\in S(l_M)$，不妨设 $x(i)\geqslant 0(i=1,2,\cdots)$. 对 $y\in\Gamma_{(x)}$，$\{x_n\}\in A_y$. 取

$\{x_n\}$ 的子列，仍用原记号使 $x_n(i)\to c_i(i=1,2,\cdots)$. 由已知可设 $\sup\limits_i \frac{b_i}{a_i}\leqslant D$. 联系 $M\in\Delta_2$，$\|\sum\limits_{i>i_0} x_n(i)e_i\|_M\leqslant D\|\sum\limits_{i>i_0} x(i)e_i\|_M\to 0(i_0\to\infty)$ 对 n 一致成立. 由此容易推出 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

注 3 联系[4]中 Th. 2. 7, l_M 的严格凸性真强于 l_M 的近严格凸. 联系[4]中 Th2. 6, l_M 的端点与近端点互不蕴含.

定理 4 l°_M 近严格凸的充要条件是(i) $\lim\limits_{b_i\to 0}\sup\limits_i \frac{b_i}{a_i}<\infty$; (ii) 对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $d>0$，当 $p(\frac{a_i}{\varepsilon})>dp(a_i)$ 时 $\frac{b_i}{a_i}<1+\varepsilon$，此处 $[a_i,b_i]$ 是 $M(u)$ 在 $[0,q_-(N^{-1}(1))]$ 中的构成仿射区间.

证明 必要性 (i) 的必要性证明可参照定理 3 条件(ii) 的必要性证明.

如(ii) 不真，存在 $\varepsilon>0$ 和 $a_i\downarrow 0$, $p\left(\frac{a_i}{\varepsilon}\right)>2^{i+1}p(a_i)$, $b_i\geqslant(1+\varepsilon)a_i$. 取正整数 m_i 满足 $\frac{1}{2^{i+1}}<m_ia_ip(a_i)\leqslant\frac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots)$. 则 $\sum\limits_i m_iM(a_i)<1$, $\sum\limits_i m_iN(p(a_i))<1$. 取 $a_0>0$, $c_0\geqslant 0$, $p_-(a_0)+c_0\leqslant p(a_0)$ 且 $N(p_-(a_0)+c_0)+\sum\limits_i m_iN(p(a_i))=1$. 置

$$z=(a_0,\overbrace{a_1,\cdots,a_1}^{m_1},\overbrace{a_2,\cdots,a_2}^{m_2},\cdots).$$

则 $x=\frac{z}{\|z\|^\circ_M}\in S(l^\circ_M)$，且 $y=(p_-(a_0)+c_0,\overbrace{p(a_1),\cdots,p(a_1)}^{m_1},\overbrace{p(a_2),\cdots,p(a_2)}^{m_2},\cdots)$ 属于 $\Gamma_{(x)}$，即 $y\in\Gamma_{(x)}$. 置

$$z_n=(a_0,\overbrace{a_1,\cdots,a_1}^{m_1},\cdots,\overbrace{a_{n-1},\cdots,a_{n-1}}^{m_{n-1}},\overbrace{(1+\varepsilon)a_n,\cdots,(1+\varepsilon)a_n}^{m_n},\overbrace{a_{n+1},\cdots,a_{n+1}}^{m_{n+1}},\cdots)$$

则 $x_n=\frac{z_n}{\|z_n\|^\circ_M}\in S(l^0_M)$ 且易知 $x_n\in A_y(n=1,2,\cdots)$. 显然

$$\begin{aligned}\|z\|^\circ_M<\|z_n\|^\circ_M&=1+M(a_0)+\sum_{i\neq n}m_iM(a_i)+m_nM((1+\varepsilon)a_n))\\&\leqslant\|z\|^\circ_M+m_n(1+\varepsilon)a_np(a_n)\\&\leqslant\|z\|^\circ_M+\frac{1+\varepsilon}{2^n}\to\|z\|^\circ_M(n\to\infty).\end{aligned}$$

故 $\|z_n\|^\circ_M\to\|z\|^\circ_M$. 于是 $x_n(j)\to x(j)(j=1,2,\cdots)$. 如果 $\{x_n\}$ 有子列依范数收敛，则必收敛于 x. 但是 $x_n-x=\frac{z_n}{\|z_n\|^\circ_M}-\frac{z_n}{\|z\|^\circ_M}+\frac{z_n-z}{\|z\|^\circ_M}$. 而

$$\begin{aligned}\rho_M\left(\frac{2(z_n-z)}{\varepsilon^2}\right)&=m_nM\left(\frac{2\varepsilon a_n}{\varepsilon^2}\right)=m_nM\left(\frac{2a_n}{\varepsilon}\right)\\&\geqslant m_n\frac{a_n}{\varepsilon}p\left(\frac{a_n}{\varepsilon}\right)>\frac{m_n}{\varepsilon}2^{n+1}a_np(a_n)>\frac{2^{n+1}}{\varepsilon}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{\varepsilon}>1,\end{aligned}$$

故有 $\|z_n-z\|^\circ_M>\|z_n-z\|_M>\frac{\varepsilon^2}{2}$. 这表明 $\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|^\circ_M\geqslant\frac{\varepsilon^2}{2\|z\|^\circ_M}$, $\{x_n\}$, 非紧.

充分性 设 $x\in S(l^\circ_M)$, $k\in K_M(x)$. 任取 $f=y+\varphi\in\Gamma_{(x)}$ 则 $p_-(kx(i))\leqslant y(i)\leqslant p(kx(i))$. 设 $x_n\in A_f$, $k_n\in K_M(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 则 $p_-(k_nx_n(i))\leqslant y(i)\leqslant p(k_nx_n(i))$，令 I

$=\{i: kx(i)$ 不属于 $M(u)$ 仿射区间或 $kx(i)=a_i, y(i)<p(a_i)$ 或 $kx(i)=b_i, y(i)>p_-(b_i)\}$，则 $i\in I$ 时，$k_nx_n(i)=kx(i)(n=1,2,\cdots)$. $i\notin I$ 时，则存在 $M(u)$ 仿射区间 $[a_i,b_i]$ 使 $kx(i)\in[a_i,b_i]$. 如果 $kx(i)\in[a_i,b_i]\cap[a_i',b_i']$，即 $b_i=a_i'$. 若 $y(i)=p_-(b_i)$ 则约定 $kx(i)\in[a_i,b_i]$；若 $y(i)=p(a_i')$，则约定 $kx(i)\in[a_i',b_i']$，这样一来总有 $k_nx_n(i)$ 与 $kx(i)$ 处于同一仿射区间且总有 $p(a_i)=y(i)(i\notin I)$.

由(i)，$D=\sup\frac{b_i}{a_i}<\infty$. 由(ii)，对 $\varepsilon>0$，存在 $d>0$，使当 $p(\frac{a_i}{\varepsilon})>dp(a_i)$ 时，$b_i<(1+\varepsilon)a_i$. 记 $J=\{i\notin I: p(\frac{a_i}{\varepsilon})>dp(a_i)\}$，$H=\{i\notin I: p(\frac{a_i}{\varepsilon})\leqslant dp(a_i)\}$.

取 $\{x_n\}$ 子列(仍用原记号)使 $k_nx_n(i)\to z(i)(i=1,2,\cdots)$.

下面证，$\|x_n-\frac{z}{\|z\|^\circ_M}\|\to 0$. 取 i_0 足够大，满足 $\sum\limits_{i>i_0}(M(kx(i)))+N(y(i))<\frac{\varepsilon}{d}$，则

$$\rho_M\Big(\frac{1}{\varepsilon(D-1)}\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big)=\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}M\Big(\frac{1}{\varepsilon(D-1)}(k_nx_n(i)-z(i))\Big)$$

$$\leqslant\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}M\Big(\frac{b_i-a_i}{\varepsilon(D-1)}\Big)\leqslant\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}M\Big(\frac{a_i}{\varepsilon}\Big)\leqslant\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}\Big(\frac{a_i}{\varepsilon}\Big)p\Big(\frac{a_i}{\varepsilon}\Big)\leqslant\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}\frac{a_i}{\varepsilon}dp(a_i)$$

$$\leqslant\sum_{i>i_0}\frac{d}{\varepsilon}(M(a_i)+N(p(a_i)))\leqslant\sum_{i>i_0}\frac{d}{\varepsilon}(M(kx(i))+N(y(i)))\leqslant 1,$$

所以

$$\Big\|\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|^\circ_M\leqslant 2\Big\|\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|_M\leqslant 2\varepsilon(D-1).$$

又当 n 充分大时 $\|\sum\limits_{i=1}^{i_0}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\|^\circ_M<\varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}\|k_nx_n-z\|^\circ_M&\leqslant\Big\|\sum_{i\in I}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|^\circ_M+\Big\|\sum_{i\in J}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|^\circ_M+\\&\quad\Big\|\sum_{\substack{i\in H\\ i\leqslant i_0}}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|^\circ_M+\Big\|\sum_{\substack{i\in H\\ i>i_0}}(k_nx_n(i)-z(i))e_i\Big\|^\circ_M\\&\leqslant 0+\Big\|\sum_{i\in I}((1+\varepsilon)a_i-a_i)e_i\Big\|^\circ_M+\varepsilon+2(D-1)\varepsilon\\&\leqslant\varepsilon\|kx\|^\circ_M+\varepsilon+2(D-1)\varepsilon\\&\leqslant(1+k+2(D-1))\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，$\|k_nx_n-z\|^\circ_M\to 0$，$k_n=\|k_nx_n\|^\circ_M\to\|z\|^\circ_M$，故 $k_n\to\|z\|^\circ_M$，进而

$$\Big\|x_n-\frac{z}{\|z\|^\circ_M}\Big\|\to 0.$$

注4 联系[4]Th. 2. 9 知 l°_M 严格凸真强于近严格凸；再由[4]Th. 2. 8，易知 l°_M 中的端点的与近端点互不蕴含.

参考文献：

[1] SINGER I. *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspeces* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[2] SCKOWSKI T, STACHURA A. *Noncompact smoothness and non compact convexity* [J]. Atti. Semi. Mat. Fis. Univ. Modena, 1988, **36**: 329—333.

[3] NAN Chao-xun, SONG Shou-bai. *Nearly strict convexty and best approximation* [J]. J. Math. Res. Exp., 1997, **17**(4): 479—488.

[4] CHEN Shu-tao. *Geometry of Orlicz Spaces* [M]. Math. Dissertation, 356, Warsaw 1996.

On the Nearly Extreme Point and the Nearly Strict Convexity of Orlicz Spaces

JI DONG-hai[1], WANG Ting-fu[1], TENG Yan-mei[2]

(1. Harbin Univ. of Sci. & Tech., Heilongjiang 150080, China; 2. Xiamen Univ., Fujian 361005, China)

Abstract: The criterion of nearly extreme point in Orlicz function spaces are given, by the way we get the criterion of nearly strict convexity in the same spaces. The criterion of nearly strict convexity in Orlicz sequence space also be given directly.

Key words: nearly extreme point; nearly strict convexity; Orlicz spaces.