第21卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 2
2001年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 2001

Banach 空间中 φ- 半压缩型映象不动点的迭代逼近*

周 海 云
(军械工程学院应用数学与力学研究所，河北 石家庄 050003)

摘　要：设 X 为实一致光滑 Banach 空间，K 为 X 的非空凸子集满足 $K+K\subset K$. 设 $T:K\to K$ 为有界 φ-半压缩映象. 设 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 K 中的序列，$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[0,1]$ 中的实数列满足

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$，$\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$；

(ii) $\alpha_n\to 0$，$\beta_n\to 0$，$n\to\infty$；

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$.

对任意初值 $x_0\in K$，定义 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下：

$$(\mathrm{IS})_1\begin{cases} y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n+v_n, n\geqslant 0,\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n+u_n, n\geqslant 0,\end{cases}$$

若 $\{Ty_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点. 由此导出一些相关的结果.

关键词：Ishikawa 迭代；φ-半压缩映象；φ-强拟增生映象；Reich 不等式；一致光滑 Banach 空间；误差项.

分类号：AMS(1991) 47H10,47H17/CLC O177.91

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0237-04

1　引言及预备知识

设 X 为实 Banach 空间，X^* 为其对偶空间. 正规对偶映射 $J:X\to 2^{X^*}$ 定义为：

$$Jx=\{x^*\in X|\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示广义对偶对. 若 X^* 为严格凸的，则 J 为单值的且对任意 $t\geqslant 0, x\in X, J(tx)=tJ(x)$；若 X^* 为一致凸的(等价地，X 为一致光滑的)，则 J 在 X 的任何有界集上是一致连续的. 本文中我们使用 j 表示单值正规对偶. 用 $D(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示映象 T 的定义域和值域，用 $F(T)$ 和 $N(T)$ 分别表示映象 T 的不动点集和核. 映象 $T:D(T)\subset A\to X$ 称为 φ- 半压缩的，如果 $F(T)$ 非空且存在严格增加函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\varphi(0)=0$ 满足对任意的 $x\in D(T)$，

* 收稿日期：1997-10-20；修订日期：1998-08-30
作者简介：周海云(1958-)，男，河北任丘人，军械工程学院教授.
E-mail：cdq@oec.edu.cn

$y \in F(T)$，有 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx-y, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2 - \varphi(\|x-y\|)\|x-y\|. \tag{1}$$

映象 T 称为 φ-强伪压缩，如果对任意 $x,y \in D(T)$，存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 使得

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2 - \varphi(\|x-y\|)\|x-y\|, \tag{2}$$

特别地，当 $\varphi(s)=ks, k \in (0,1)$ 时(2)式成立，则 T 称为强伪压缩映象. 有例子表明强伪压缩映象是 φ-强伪压缩映象的一个真子类，而不动点集非空的 φ-强伪压缩映象 是 φ-半压缩映象的一个真子类(见[1,2]). Chidume[3]证明了 Mann 迭代过程收敛于连续强伪压缩映象的不动点. 他指出 Ishikawa 迭代过程是否收敛于该类映象的不动点仍是一个未解决的问题. [4]使用新的技巧彻底解决了上述问题. 一个自然的问题是：带误差项的 Ishikawa 迭代过程是否收敛于更一般的 φ-半压缩映象的不动点？本文的目的就是研究并解决这个问题.

引理[5] 设 X 为一致光滑 Banach 空间，则存在一个连续增加的函数 $b:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足 $b(0)=0$，对任意 $c \geqslant 1$，$b(ct) \leqslant cb(t)$，而且对任意的 $x,y \in X$，

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle + \max\{\|x\|, 1\}\|y\|b(\|y\|).$$

称上式为 Reich 不等式.

2 主要结果

定理 2.1 设 X 为实一致光滑 Banach 空间，K 为 X 中的非空凸子集满足 $K+K \subset K$，$T: K \to K$ 为有界 φ-半压缩映象，设 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 为 K 中的序列，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 为$[0,1]$中的实数列满足

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$，$\|v_n\| \to 0 (n\to\infty)$；

(ii) $\beta_n \to 0$，$\alpha_n \to 0$，$n \to \infty$；

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$.

对任意初值 $x_0 \in K$，定义 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为：

$$(\mathrm{IS})_1 \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n + u_n, n \geqslant 0, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n + v_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

若 $\{Ty_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

证明略.

注 1 条件"$K+K \subset K$"只用于保证迭代序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 有意义，当 u_n, v_n 恒为零时，该条件不必要.

推论 1 设 $X, T, K, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 如定理 2.1 所述，只是不要求"$K+K \subset K$"，对任意初值 $x_0 \in K$，定义 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$：

$$(\mathrm{IS})_2 \quad \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n, n \geqslant 0, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

若 $\{Ty_n\}$ 有界，则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

推论 2 设 $X, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 如定理 2.1 所述，K 为 X 中的非空有界闭凸子集，$T: K \to K$ 为连续强伪压缩映象，则由 $(\mathrm{IS})_2$ 所定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

注 2 推论 1 将作者[8,定理 1]扩展到更广泛的 φ-半压缩映象,定理 2.1 扩展了 Osilike [1,Theorem 2].

因为 φ-强拟增生算子[9]与 φ-半压缩映象密切相关,作为定理 2.1 的一个重要推论,我们有下面的

定理 2.2 设 $X,\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{u_n\},\{v_n\}$如定理 2.1 所述,设 $T:X\to X$ 为有界 φ-强拟增生算子,定义 $S:X\to X,Sx=x-Tx,\forall\ x\in X$.对任意初值 $x_0\in X$,定义 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$(\mathrm{IS})_3\quad \begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n,n\geqslant 0,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n,n\geqslant 0.\end{cases}$$

若$\{Sy_n\}$有界,则$\{x_n\}$强收敛于 T 的唯一零点.

推论 3 设 $X,\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\{u_n\},\{v_n\}$ 如定理 2.2 所述,设 $T:X\to X$ 为次连续增生算子且 $R(I-T)$ 为有界集,则由$(IS)_3$ 所定义的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$ 强收敛于方程 $Tx=f$ 的唯一解.

注 3 定理 2.2 及其推论 3 扩展或改进了作者[8,定理 4],Osilike[1,Theorem 1].

推论 4 设 $X,\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\{u_n\},\{v_n\}$ 如定理 2.2 所述,设 $T:X\to X$ 为有界 m-增生的,对任意 $f\in X$,定义 $S:X\to X,Sx=f-Tx,x\in X$,对任意初值 $x_0\in X$,Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$(\mathrm{IS})_4\quad \begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n,n\geqslant 0,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n,n\geqslant 0.\end{cases}$$

若$\{Sy_n\}$(或$\{Ty_n\}$)有界,则$\{x_n\}$强收敛于方程 $x+Tx=f$ 的唯一解.

注 4 在定理 2.1 和 2.2 中,给出序列$\{Ty_n\}$ 或$\{Sy_n\}$ 是有界的充分条件将是一个值得研究的问题.

参考文献:

[1] OSILIKE M O. *Iterative solution of nonlinear equation of φ-strongly accretive type* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **200**: 259—271.

[2] CHIDUME C E and OSILIKE M O. *Fixed point iterations for strictly hemi-contractive maps in uniformly smooth Banach spaces* [J]. Number. Func. Anal and Optim. 1994, **15**: 779—790.

[3] CHIDUME C E. *Approximation of fixed points of strongly pseudo-contractive mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **120**: 545—551.

[4] ZHOU H Y. *A remake on Ishikawa iteration* [J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**: 631—633.

[5] REICH S. *An iterative procedure for constructing zeros of accretive operators in Banach spaces* [J]. Nonl. Anal., 1978, **2**: 85—92.

[6] DEIMLING K. *Nonlinear Functionl Analysis* [M]. Berlin, Springer-Verlag, 1985.

[7] DEIMLING K. *Zeros of accretive operators* [J]. Manuscripta Math., 1974, **13**: 365—374.

[8] 周海云. 一致光滑 Banach 空间中一类非线性算子的 Ishikawa 迭代序列的收敛定理 [J]. 数学学报, 1997, **40**: 751—758.

ZHOU H Y. *Convergence theorems for the Ishikawa iterative sequences of certain nonlinear operators in uniformly smooth Banach spaces* [J]. Acta. Math. Sinica, 1997, **40**: 751—758. (in Chinese)

[9] ZHOU H Y and JIA Y T. *Approximating the zeros of accreteve operators by the Ishikawa iterative process* [J]. Abstr. Appl. Anal., 1996, 1: 153—167.

Iterative Approximation of Fixed Points of φ-Hemicontractive Maps in Banach Spaces

ZHOU Hai-yun

(Inst. of Appl. Math. & Mech., Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: Let X be a real uniformly smooth Banach space, K a nonempty subset of X such that $K+K\subset K$. Let $T:K\to K$ be a bounded φ-hemicontractive map. Let $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ be two sequences in K and $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ be two real sequences in $[0,1)$ satisfying

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;

(ii) $\alpha_n\to 0, \beta_n\to 0, n\to\infty$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)=\infty$.

For an arbitrary initial value $x_0\in K$, define the Ishikawa iterative sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ as follows:

$$(\mathrm{IS})_1\begin{cases} y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n+v_n, n\geqslant 0, \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n+u_n, n\geqslant 0, \end{cases}$$

If $\{Ty_n\}$ is bounded, then $\{x_n\}$ converges strongly to the unique fixed point of T. Some related results are deduced.

Key words: Ishikawa iteration; φ-hemicontraction; φ- strongly quasi-accretive mapping; Reich's inequality; uniforrmly smooth Banach space; errors.