第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

# 一类奇异二阶系统边值问题的正解*

姚庆六[1]， 白占兵[2]

(1. 西北师范大学数学系，甘肃 兰州 730070；2. 石油大学数学系，山东 东营 257062)

**摘 要**：本文利用正规锥和迭代法考察了一类奇异二阶系统边值问题的正解的存在性. 我们的工作是对[1]的补充和发展.

**关键词**：奇异二阶系统；正规锥；迭代法；正解.

**分类号**：AMS(1991) 34B15/CLC O175.8

**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0241-06

本文考察边值问题

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} x''(t)+\lambda a(t)f(x(t),y(t))=0 \\ y''(t)+\lambda b(t)g(x(t),y(t))=0 \qquad 0<t<1 \\ x(0)=y(0)=x(1)=y(1)=0 \end{cases}$$

的正解存在性，其中 $\lambda>0$.

A. M. Fink[1]在 $f(0,0)>0,g(0,0)>0$(或者 $f(0,0)=0,g(0,0)=0$) 及 $a,b$ 非奇异的情况下，利用打靶法和锥拉伸证明了问题(B)存在一组正解. 本文利用正规锥上的不动点定理在 $f(0,0)>0,g(0,0)=0$(或者 $f(0,0)=0,g(0,0)>0$) 及 $a,b$ 奇异的情况下证明了问题(B)存在一组正解，并且给出了求解的迭代程序. 本文还在一定条件下给出了问题(B)有正解的参数 $\lambda$ 的取值范围.

## 1 预备工作

本文中记

$$\|x\|=\max_{0\le t\le 1}|x(t)|,\quad \forall\, x\in C[0,1],$$

$$C^+E=\{h:E\to[0,+\infty)\ \text{连续}\},$$

$$K=\{x\in C^+[0,1]\mid x\ \text{凹且}\ x(0)=x(1)=0\}.$$

显然 $K$ 为 $C[0,1]$ 中的正规锥，$K\times K$ 为 $C[0,1]\times C[0,1]$ 中的正规锥.

本文还将使用下列条件

* 收稿日期：1998-05-18；修订日期：2000-04-24

作者简介：姚庆六(1946- )，男，西北师范大学教授.

E-mail：maqs@nwnu.edu.cn

$(H_1)$ $a,b\in C^+(0,1)$均不恒为 0,并且

$$\int_0^1 t(1-t)a(t)\mathrm{d}t<+\infty,\int_0^1 t(1-t)b(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

$(H_2)$ $f,g\in C^+[0,+\infty)\times[0,+\infty)$,并且 $f,g$ 关于两变元分别单调增.

本文的工作基于下列两个引理.

**引理 1.1** 设 $T:K\times K\to K\times K$ 为全连续的增映象.如果存在$(x_0,y_0)\in K\times K$ 使得$(x_0,y_0)\leqslant T(x_0,y_0)$ 并且$\{T^n(x_0,y_0)\}_{n=0}^{\infty}$ 有界,则存在$(x^*,y^*)\in K\times K$ 使得 $T(x^*,y^*)=(x^*,y^*)$ 并且$(x^*,y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}T^n(x_0,y_0)$.

**引理 1.2** 假设条件$(H_1)$、$(H_2)$ 成立.对于 $x,y\in K$,记

$$u_{xy}(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

$$v_{xy}(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)b(s)g(x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

$$T(x(t),y(t))=(u_{xy}(t),v_{xy}(t)).$$

则 $T:K\times K\to K\times K$ 为全连续的增映象,其中

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

**证明** 第一步. 设 $a,b\in C^+[0,1]$.

根据 $G(t,s)$的定义知任取 $t_1,t_2\in[0,1]$总有

$$|G(t_1,s)-G(t_2,s)|\leqslant 2|t_1-t_2|,\quad s\in[0,1].$$

任取 $x,y\in K$,利用 $f$ 的单调增性知

$$|u_{xy}(t_1)-u_{xy}(t_2)|=|\lambda\int_0^1(G(t_1,s)-G(t_2,s))a(s)f(x(s),y(s))\mathrm{d}s|$$
$$\leqslant 2\lambda\|a\|f(\|x\|,\|y\|)|t_1-t_2|.$$

这表明 $u_{xy}\in C[0,1]$. 注意到 $u_{xy}(0)=u_{xy}(1)=0$ 并且

$$u''_{xy}(t)=-\lambda a(t)f(x(t),y(t))\leqslant 0,\quad 0<t<1,$$

我们断言 $u_{xy}\in K$. 类似地 $v_{xy}\in K$. 这样一来显然 $T:K\times K\to K\times K$ 为连续的增映象.

现设 $E\subset K\times K$ 为任意的有界集,并设

$$\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|\leqslant r,\quad (x,y)\in E.$$

记

$$F_u=\{u_{xy}|T(x,y)=(u_{xy},v_{xy}),(x,y)\in E\},$$
$$F_v=\{v_{xy}|T(x,y)=(u_{xy},v_{xy}),(x,y)\in E\},$$

则 $F_u\subset K,F_v\subset K$ 并且 $T(E)\subset F_u\times F_v$. 仅需证明 $F_u,F_v$ 均为 $C[0,1]$ 中的相对紧致集即可断言 $T$ 全连续. 事实上任取$(x,y)\in E$ 及 $t_1,t_2\in[0,1]$,则有

$$\|u_{xy}\|\leqslant\lambda\|a\|f(r,r),|u_{xy}(t_1)-u_{xy}(t_2)|\leqslant 2\lambda\|a\|f(r,r)|t_1-t_2|.$$

这表明 $F_u$ 一致有界且等度一致连续. 根据 Arzela-Ascoli 定理,$F_u$ 为 $C[0,1]$中的相对紧致集. 类似地 $F_v$ 也是 $C[0,1]$中的相对紧致集.

第二步. 设 $a,b\in C^+(a,b)$.

对于 $n=1,2,\cdots$，记

$$a_n(t)=\min\{a(t),n\},\quad b_n(t)=\min\{b(t),n\},$$
$$e_n(a)=\{t\in[0,1]\mid a(t)\geqslant n\},\quad e_n(b)=\{t\in[0,1]\mid b(t)\geqslant n\}.$$

任取 $x,y\in K$，记

$$u_{xy}^{(n)}(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a_n(s)f(x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

$$v_{xy}^{(n)}(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)b_n(s)f(x(s),y(s))\mathrm{d}s,$$

$$T_n(x,y)=(u_{xy}^{(n)},v_{xy}^{(n)}).$$

由第一步所证知每一个 $T_n:K\times K\to K\times K$ 为全连续的增映象.

仅需证明对于任意的 $r>0$，有 $\sup\{\|T(x,y)-T_n(x,y)\|\mid(x,y)\in K_r\times K_r\}\to 0$，即可断言 $T:K\times K\to K\times K$ 为全连续的增映象，其中 $K_r=\{x\in K\mid\|x\|\leqslant r\}$. 事实上，由积分的绝对连续性知

$$\int_{e_n(a)} t(1-t)a(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

注意到总有 $0\leqslant G(t,s)\leqslant s(1-s)$，$t,s\in[0,1]$，则对于任意的 $(x,y)\in K_r\times K_r$ 有

$$\begin{aligned}\|u_{xy}-u_{xy}^{(n)}\| &= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_{xy}(t)-u_{xy}^{(n)}(t)|\\ &=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\lambda\int_{e_n(a)}G(t,s)(a(s)-n)f(x(s),y(s))\mathrm{d}s\\ &\leqslant \lambda f(r,r)\int_{e_n(a)}s(1-s)a(s)\mathrm{d}s\to 0.\end{aligned}$$

类似地 $\|v_{xy}-v_{xy}^{(n)}\|\to 0$. 由此立得所证事实.

## 2 主要结论

在本段中记

$(\mathrm{H}_3)$ $f(0,0)>0,g(0,0)=0$.

$(\mathrm{H}'_3)$ $f(0,0)=0,g(0,0)>0$.

$(\mathrm{H}_4)$ $g(t,0)>0,t>0$.

$(\mathrm{H}'_4)$ $f(0,s)>0,s>0$.

$(\mathrm{H}_5)$ 任取 $r>0$ 有 $\lim\limits_{s\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant r}\dfrac{g(t,s)}{s}=0$ 并且 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{s\geqslant 0}\dfrac{f(t,s)}{t}=0$.

$(\mathrm{H}'_5)$ 任取 $r>0$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant r}\dfrac{f(t,s)}{t}=0$ 并且 $\lim\limits_{s\to\infty}\sup\limits_{t\geqslant 0}\dfrac{g(t,s)}{s}=0$.

$(\mathrm{H}_6)$ $0<M<+\infty$，其中 $M=\max\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\sup\limits_{s\geqslant 0}\dfrac{f(t,s)}{t},\overline{\lim\limits_{s\to\infty}}\sup\limits_{t\geqslant 0}\dfrac{g(t,s)}{s}\}$.

此外记

$$d(a)=\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)a(s)\mathrm{d}s,\ d(b)=\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

当 $a,b$ 不恒为 0 时，$d(a)>0$ 且 $d(b)>0$.

主要结论是

**定理 2.1** 假设($H_1$)、($H_2$)、($H_3$)、($H_4$)成立，($H_5$)或者($H'_5$)成立，则对于任何 $\lambda>0$，问题(B)存在一组解 $(x^*,y^*)\in K\times K$，满足 $(x^*,y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}T^n(0,0)$ 并且 $x^*(t)>0, y^*(t)>0$，$0<t<1$.

**证明** 设 $T$ 如引理 1.2. 仅需证明 $T$ 在 $K\times K$ 上有不动点即可断言问题(B)有解.

记 $(x_1,y_1)=T(0,0)$，$(x_{n+1},y_{n+1})=T(x_n,y_n)$，$n=1,2,\cdots$. 则 $(x_n,y_n)=T^n(0,0)$ 并且

$$x_{n+1}(s)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(x_n(s),y_n(s))\mathrm{d}s,$$

$$y_{n+1}(s)=\lambda\int_0^1 G(t,s)b(s)g(x_n(s),y_n(s))\mathrm{d}s.$$

由于 $f(0,0)>0$ 且 $a$ 不恒为 0，知

$$x_1(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(0,0)\mathrm{d}s>0,\quad 0<t<1.$$

由于 $g(0,0)=0$，易知 $y_1(t)\equiv 0$. 另一方面($H_4$)表明 $b(s)g(x_1(s),0)$ 在 $(0,1)$ 上不恒为 0，于是 $y_2(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)b(s)g(x_1(s),0)\mathrm{d}s>0, 0<t<1$.

下面证明 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 不妨设($H_5$)成立.

假设 $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界，则下列两种情况必有其一：

Ⅰ. $\|x_n\|\to+\infty$.

Ⅱ. $\sup\limits_n\|x_n\|=R<+\infty$ 且 $\|y_n\|\to+\infty$.

在情况Ⅰ下由($H_5$)知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\geqslant 0}\frac{f(x_n,s)}{\|x_n\|}=0.$$

这表明存在 $N$，使 $n\geqslant N$ 时

$$f(\|x_n\|,s)<\frac{\|x_n\|}{d(a)},\quad s\geqslant 0.$$

考虑到 $f$ 两变元单调增，知当 $n\geqslant N$ 时

$$f(x_n(t),y_n(t))<\frac{\|x_n\|}{d(a)},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

这样一来当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}\|&=\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)a(s)f(x_n(s),y_n(s))\mathrm{d}s\\&<\frac{\|x_n\|}{d(a)}\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(x,s)a(s)\mathrm{d}s=\|x_n\|.\end{aligned}$$

此与 $\|x_n\|\to+\infty$ 矛盾.

在情况Ⅱ下由($H_5$)知存在 $N$，使 $n\geqslant N$ 时

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant R}\frac{g(t,\|y_n\|)}{\|y_n\|}<\frac{1}{d(b)}.$$

注意到 $0\leqslant x_n(t)\leqslant\|x_n\|\leqslant R$，知当 $n\geqslant N$ 时

$$g(x_n(t),y_n(t))<\frac{\|y_n\|}{d(b)},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

$$\| y_{n+1} \| = \lambda \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 G(t,s) b(s) g(x_n(s), y_n(s)) \mathrm{d}s$$
$$< \frac{\| y_n \|}{d(b)} \lambda \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 G(t,s) b(s) \mathrm{d}s = \| y_n \|.$$

此与 $\| y_n \| \to +\infty$ 矛盾.

因此 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 根据引理 1.1, 知存在 $(x^*, y^*) \in K \times K$ 使得 $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$ 并且 $(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n)$.

考虑到 $T$ 为增映象, 知在 $K$ 中 $x_n \leqslant x_{n+1}, y_n \leqslant y_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$. 现因 $x_n \to x^*$, 知 $x_1 \leqslant x^*$. 于是 $x^*(t) \geqslant x_1(t) > 0, 0 < t < 1$. 又因 $y_n \to y^*$, 知 $y_2 \leqslant y^*$. 于是 $y^*(t) \geqslant y_2(t) > 0, 0 < t < 1$.

**定理 2.2** 设 $(\mathrm{H}_1)$、$(\mathrm{H}_2)$、$(\mathrm{H}'_3)$、$(\mathrm{H}'_4)$ 成立, $(\mathrm{H}_5)$ 或者 $(\mathrm{H}'_5)$ 成立, 则对于任何 $\lambda > 0$ 问题 (B) 存在一组解 $(x^*, y^*) \in K \times K$ 满足 $(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} T^n(0,0)$ 并且 $x^*(t) > 0, y^*(t) > 0, 0 < t < 1$.

**证明** 类似于定理 2.1.

当 $\lim\limits_{t \to \infty} \sup\limits_{s \geqslant 0} \dfrac{f(t,s)}{s}$ 及 $\lim\limits_{t \to \infty} \sup\limits_{t \geqslant 0} \dfrac{g(t,s)}{s}$ 不存在或不为 0 的情况下, 还有如下结论.

**定理 2.3** 设下列事实之一成立:

(1) $(\mathrm{H}_1)$、$(\mathrm{H}_2)$、$(\mathrm{H}_3)$、$(\mathrm{H}_4)$、$(\mathrm{H}_6)$ 满足.

(2) $(\mathrm{H}_1)$、$(\mathrm{H}_2)$、$(\mathrm{H}'_3)$、$(\mathrm{H}'_4)$、$(\mathrm{H}_6)$ 满足.

则对于任何 $0 < \lambda < \lambda^*$, 问题 (B) 存在一组解 $(x^*, y^*) \in K \times K$ 满足 $(x^*, y^*) = \lim\limits_{n \to \infty} T^n(0,0)$ 并且 $x^*(t) > 0, y^*(t) > 0, 0 < t < 1$. 其中

$$\lambda^* = (M \max\{\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 G(t,s) a(s) \mathrm{d}s, \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 G(t,s) b(s) \mathrm{d}s\})^{-1}.$$

**证明** 设 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 如同定理 2.1. 分析定理 2.1 的证明显然仅需证明在本定理条件下 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界.

假设 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 无界, 则或者 $\| x_n \| \to +\infty$, 或者 $\| y_n \| \to +\infty$.

如果 $\| x_n \| \to +\infty$, 因 $0 < \lambda < \lambda^*$, 知

$$M < (\lambda \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 G(t,s) a(s) \mathrm{d}s)^{-1} = \frac{1}{d(a)}.$$

这表明 $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sup\limits_{s \geqslant 0} \dfrac{f(\| x_n \|, s)}{\| x_n \|} < \dfrac{1}{d(a)}$. 于是存在 $N$, 使得 $n \geqslant N$ 时

$$f(\| x_n \|, s) < \frac{\| x_n \|}{d(a)}, \quad s \geqslant 0.$$

仿照定理 2.1 的证明知当 $n \geqslant N$ 时 $\| x_n \| > \| x_{n+1} \|$. 此不可能.

类似地 $\| y_n \| \to +\infty$ 也不可能.

于是 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 定理获证.

## 参考文献:


[1] FINK A M. *Positive solutions of second order systems of boundary value problems* [J]. J. Math.

Anal. Appl., 1993, **180**: 93—108.
[2] CANTRELL R S and CONSNER C. *On the convex case in the positive problem for elliptic systems* [J]. Nonlinear Analysis, 1988, **12**: 827—853.
[3] FINK A M, GATICA J A and HARNADE G E. *Eigenvalue of generalized Gelfand models* [J]. Nonlinear Analysis, 1993, **20**: 1453—1468.
[4] 钟承奎,范先令,陈文嫄. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州大学出版社, 1998, 120—132.
ZHONG Cheng-kui, FAN Xian-ling, CHEN Wen-yuan. *Introduction to Nonlinear Functional Analysis* [M]. Lanzhou University Press, 1998, 120—132.

# Positive Solutions of Boundary Value Problems of Some Singular Second Order Systems

YAO Qing-liu[1], BAI Zhan-bing[2]

(1. Dept. of Math., Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. Dept. of Math., Petroleum University, Dongying 257062, China)

**Abstract**: In this paper, we use normal cone and iteration method to study the existence of positive solutions of boundary value problems for some singular second systems. Our work is a supplement to [1].

**Key words**: singular second system; normal cone; iteration method; positive solution.