第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

一类非线性微分差分方程的近似解*

赵 杰 民
(中国金融学院**数学室，北京 100029)

摘 要：本文对一类非线性微分差分方程求得一致有效渐近展开式，给出了共振解的近似解析表达式，并推广了 Nayfeh 和 Mook 的结果.

关键词：微分差分方程；非线性；近似解.
分类号：AMS(1991) 34C/CLC O175.7
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)02-0247-05

1 引 言

对于带有自由的自持振动的软激励方程

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=\epsilon[\dot{x}(t)-\frac{1}{3}\dot{x}^3(t)]+\epsilon k\cos\Omega t \tag{1}$$

的主共振情形，Nayfeh 和 Mook(见文[1]第四章)给出了解的一次近似为

$$x=\alpha\cos(\Omega t-\gamma), \tag{2}$$

式中 α 和 γ 由下式确定：

$$\alpha'=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4}\omega^2\alpha^2)\alpha+\frac{k}{2\omega}\sin\gamma, \tag{3}$$

$$\alpha\gamma'=\sigma\alpha+\frac{k}{2\omega}\cos\gamma. \tag{4}$$

本文研究非线性微分差分方程

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=\epsilon f(x(t),\dot{x}(t),x(t-r),\dot{x}(t-r))+E(\Omega t), \tag{5}$$

式中 ϵ 是无量纲小参数，x 是无量纲因变量，$f(u_1,v_1,u_2,v_2)$是关于 u_1,v_1,u_2 和 v_2 的解析函数，$r\geqslant0$ 是常滞量，ϵr 是小量，$E(\Omega t)=E(\Omega(t+2\pi/\Omega))$是关于 t 的周期为 $2\pi/\Omega$ 的外激励，激励频率 Ω 是常数，$E(u)$是关于 u 的连续可微函数. 本文考虑软激励 $E(\Omega t)=\epsilon E_1(\Omega t)$的情形. (1)式是(5)式的特例.

2 主要结果

* 收稿日期：1998-11-10
** 现为对外经济贸易大学信息学院
作者简介：赵杰民(1959-)，男，博士，副教授.

现用多尺度法求方程(5)的解的一致有效渐近展开式：

$$x(t;\varepsilon)=x_0(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\varepsilon^2x_2(T_0,T_1,T_2,\cdots)+\cdots, \tag{6}$$

其中 $T_n=\varepsilon^n t,n=0,1,2,\cdots$. 记 $D_n=\partial/\partial T_n$，将 $x_n(T_0,T_1,T_2\cdots)$，$x_n(T_0-r,T_1-\varepsilon r,T_2-\varepsilon^2 r,\cdots)$，$x(t)$，$\dot{x}(t)$，$x(t-r)$和 $\dot{x}(t-r)$分别简记成 x_n，x_{nr}，x，$\dot{x}$，x_r 和 $\dot{x}_r$，将(6)式代入(5)式，并将 f 在 $\varepsilon=0$ 处展成 ε 的幂级数，比较 ε 的同次幂的系数，便得到各阶近似方程：

$$\varepsilon^0:D_0^2x_0+\omega^2x_0=0, \tag{7}$$

$$\varepsilon^1:D_0^2x_1+\omega^2x_1=-2D_0D_1x_0+f(x_0,D_0x_0,x_{0r},D_0x_{0r})+E_1(\Omega t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2:D_0^2x_2+\omega^2x_2=&-2D_0D_1x_1-D_1^2x_0-2D_0D_2x_0+x_1\frac{\partial f(x_0,D_0x_0,x_{0r},D_0x_{0r})}{\partial x}+\\&(D_0x_1+D_1x_0)\frac{\partial f(x_0,D_0x_0,x_{0r},D_0x_{0r})}{\partial\dot{x}}+\\&x_{1r}\frac{\partial f(x_0,D_0x_0,x_{0r},D_0x_{0r})}{\partial x_r}+\\&(D_0x_{1r}+D_1x_{0r})\frac{\partial f(x_0,D_0x_0,x_{0r},D_0x_{0r})}{\partial\dot{x}_r},\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

定理 1 对主共振 $\Omega\approx\omega$ 的情形，方程(5)的解的一次近似为

$$x=\alpha\cos(\Omega t-\gamma), \tag{10}$$

式中 $\alpha(T_1)$和 $\gamma(T_1)$由下式给出：

$$\begin{aligned}\alpha'=&-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(\alpha\cos(\theta+\omega r),-\omega\alpha\sin(\theta+\omega r),\alpha\cos\theta,-\omega\alpha\sin\theta)+\\&E_1(\theta+\gamma+\omega r)]\sin(\theta+\omega r)\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\alpha\gamma'=&\sigma\alpha+\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(\alpha\cos(\theta+\omega r),-\omega\alpha\sin(\theta+\omega r),\alpha\cos\theta,-\omega\alpha\sin\theta)+\\&E_1(\theta+\gamma+\omega r)]\cos(\theta+\omega r)\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $T_1=\varepsilon t$，σ 为解谐参数.

证明 方程(7)的解为

$$x_0=\alpha(T_1,T_2,\cdots)\cos(\omega T_0+\beta(T_1,T_2,\cdots)), \tag{13}$$

其中 $\alpha(T_1,T_2,\cdots)$和 $\beta(T_1,T_2,\cdots)$为 $T_1,T_2,\cdots$的待定函数. 将 $\alpha(T_1-\varepsilon r,T_2-\varepsilon^2 r,\cdots)$与 $\beta(T_1-\varepsilon r,T_2-\varepsilon^2 r,\cdots)$分别记成 α_r 和 β_r. 把(13)式代入(8)式中，得到

$$\begin{aligned}D_0^2x_1+\omega^2x_1=&2\omega(D_1\alpha)\sin(\omega T_0+\beta)+2\omega\alpha(D_1\beta)\cos(\omega T_0+\beta)+\frac{a_0}{2}+\\&\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r)+b_n\sin(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r))+\frac{\tilde{a}_0}{2}+\\&\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r)+\tilde{b}_n\sin(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r)),\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}a_n=&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha\cos(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),-\omega\alpha\sin(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),\alpha_r\cos\theta,\\&-\omega\alpha_r\sin\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,n=0,1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{15}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a\cos(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),-\omega a\sin(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),a_r\cos\theta,$$
$$-\omega a_r\sin\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta, n=1,2,\cdots, \tag{16}$$

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}E_1(\theta+\sigma T_1+\omega r-\beta_r)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, n=0,1,2,\cdots, \tag{17}$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}E_1(\theta+\sigma T_1+\omega r-\beta_r)\sin n\theta\mathrm{d}\theta, n=1,2,\cdots. \tag{18}$$

令方程中产生长期项的部分等于零，若求一次近似，a 和 β 只看作 T_1 的函数，引进变换 $\gamma=\sigma T_1-\beta$，则振幅 $a(T_1)$和相位 $\beta(T_1)$可表为(见文[2—5])(11)式和(12)式，这时方程(5)的解的一次近似为(10)式. 证毕.

注 1 文[1]的结果是本文结果的推论. 事实上，只要在(5)式中取 $f(x(t),\dot{x}(t),x(t-r),\dot{x}(t-r))=\dot{x}(t)-\frac{1}{3}\dot{x}^3(t)$，$E_1(\Omega t)=k\cos\Omega t$，由公式(11)容易得到(3)式、由公式(12)容易得到(4)式.

定理 2 对超谐共振 $\Omega\approx\frac{1}{q}\omega(q=2,3,\cdots,m)$的情形，方程(5)的解的一次近似为

$$x=a\cos(q\Omega t-\gamma), \tag{19}$$

式中 $a(T_1)$和 $\gamma(T_1)$由下式给出：

$$a'=-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(a\cos(\theta+\omega r),-\omega a\sin(\theta+\omega r),a\cos\theta,$$
$$-\omega a\sin\theta)\sin(\theta+\omega r)+E_1(\theta+\frac{1}{q}\gamma+\frac{1}{q}\omega r)\sin(q\theta+\omega r)]\mathrm{d}\theta, \tag{20}$$

$$a\gamma'=\sigma a+\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}[f(a\cos(\theta+\omega r),-\omega a\sin(\theta+\omega r),a\cos\theta,$$
$$-\omega a\sin\theta)\cos(\theta+\omega r)+E_1(\theta+\frac{1}{q}\gamma+\frac{1}{q}\omega r)\cos(q\theta+\omega r)]\mathrm{d}\theta, \tag{21}$$

其中 $T_1=\varepsilon t$，σ 为解谐参数.

证明 把(13)式代入(8)式中，得到

$$D_0^2x_1+\omega^2x_1=2\omega(D_1a)\sin(\omega T_0+\beta)+2\omega a(D_1\beta)\cos(\omega T_0+\beta)+\frac{a_0}{2}+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r)+b_n\sin(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r))+$$
$$\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos(\frac{1}{q}n\omega T_0-\frac{1}{q}n\omega r+\frac{1}{q}n\beta_r)+$$
$$\tilde{b}_n\sin(\frac{1}{q}n\omega T_0-\frac{1}{q}n\omega r+\frac{1}{q}n\beta_r)), \tag{22}$$

其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$和 $b_n(n=1,2,\cdots)$分别由(15)式和(16)式给出，而

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}E_1(\theta+\frac{1}{q}\sigma T_1+\frac{1}{q}\omega r-\frac{1}{q}\beta_r)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, n=0,1,2,\cdots, \tag{23}$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}E_1(\theta+\frac{1}{q}\sigma T_1+\frac{1}{q}\omega r-\frac{1}{q}\beta_r)\sin n\theta\mathrm{d}\theta, n=1,2,\cdots. \tag{24}$$

令方程中产生长期项的部分等于零，若求一次近似，引进变换 $\gamma=\sigma T_1-\beta$ 后，振幅 $a(T_1)$和相

位 $\beta(T_1)$可表为(见文[2-5])(20)式和(21)式. 这时方程(5)的解的一次近似为(19)式. 证毕.

定理 3 对次共振 $\Omega\approx 0$ 的情形,方程(5)的解的一次近似为

$$x=a\cos(\omega t+\beta), \tag{25}$$

式中 $a(T_1)$和 $\beta(T_1)$由下式给出:

$$a'=-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos(\theta+\omega r),-\omega a\sin(\theta+\omega r),a\cos\theta,-\omega a\sin\theta)\sin(\theta+\omega r)\mathrm{d}\theta, \tag{26}$$

$$a\beta'=-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(a\cos(\theta+\omega r),-\omega a\sin(\theta+\omega r),a\cos\theta,-\omega a\sin\theta)\cos(\theta+\omega r)\mathrm{d}\theta, \tag{27}$$

其中 $T_1=\varepsilon t$.

证明 引进一个解谐参数 σ:$\Omega=\varepsilon\sigma$,把(13)式代入(8)式中,得到

$$\begin{aligned} &D_0^2x_1+\omega^2x_1\\ &\quad=2\omega(D_1a)\sin(\omega T_0+\beta)+2\omega a(D_1\beta)\cos(\omega T_0+\beta)+\frac{a_0}{2}+\\ &\quad\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r)+b_n\sin(n\omega T_0-n\omega r+n\beta_r))+E_1(\sigma T_1), \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$和 $b_n(n=1,2,\cdots)$分别由(15)式和(16)式给出. 令方程中产生长期项的部分等于零,便得到函数 a 和 β 的方程:

$$\begin{aligned} D_1a=&-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}f(a\cos(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),-\omega a\sin(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),\\ &a_r\cos\theta,-\omega a_r\sin\theta)\sin(\theta+\beta+\omega r-\beta_r)\mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} a(D_1\beta)=&-\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}f(a\cos(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),-\omega a\sin(\theta+\beta+\omega r-\beta_r),\\ &a_r\cos\theta,-\omega a_r\sin\theta)\cos(\theta+\beta+\omega r-\beta_r)\mathrm{d}\theta, \end{aligned} \tag{30}$$

若求一次近似,a 和 β 只看作 T_1 的函数,所以振幅 $a(T_1)$和相位 $\beta(T_1)$可表为(见文[2-5])(26)式和(27)式. 这时方程(5)的解的一次近似为(25)式. □

对一些具体的数学模型,如带有时滞的 van der Pol 方程和 Duffing 方程等的强迫振动问题,可以通过本文的公式先求出 a'和 $a\gamma'$,再从奇点$(\bar{x},\bar{\gamma})$满足的相应方程中消去 $\bar{\gamma}$,得到频率响应方程,然后通过讨论 ωr 的取值情况,可研究频率响应曲线和稳态运动的稳定性等问题. 进一步的工作我们将另文详细讨论.

参考文献:

[1] NAYFEH A H and MOOK D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. John Wiley & Sons, 1979.

[2] 赵杰民. 时滞系统的振动、稳定性与周期运动研究 [C]. 北京航空航天大学博士学位论文, 1994, 7-50.
ZHAO Jie-min. *The study for Oscillation, Stability and Periodic Motions of Time-Delay Systems* [C]. The Doctorate Thesis of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1994, 7-50.

[3] ZHAO Jie-min, HUANG Ke-lei, LU Qi-shao. *The existence of periodic solutions for a class of functional differential equations and their application* [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1994, 151: 49-59.

[4] 陆启韶,周 梦,赵杰民. 现代数学基础 [M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1997,125-135.

LU Qi-shao., ZHOU Meng, ZHAO Jie-min. *The Foundation of Modern Mathematics* [M]. Beijing: BUAA Press, 1997, 125—135.

[5] 赵杰民,黄克累,陆启韶. 一类带有时滞的动力系统的几个定理与应用 [J]. 应用数学学报, 1995, 18 (3): 422—428.

ZHAO Jie-min, HUANG Ke-lei, LU Qi-shao. *Some theorems for a class of dynamical system with delay and their application* [J]. ACTA Mathematical Applicate Sinica, 1995, **18**(3): 422—428.

The Approximate Solutions for a Class of Differential Difference Equations

ZHAO Jie-min

(China Institute of Finance and Banking, Beijing 100029, China)

Abstract: In this paper, we get a uniformly valid asymptotic expansion for a class of differential differance equations, give an approximate analytic formula of resonance solutions and generalize the Nayfeh and Mook's result.

Key words: differential differance equatin; nonlinear; approximate solution.