第21卷第2期 数学研究与评论 Vol.21 No.2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

N-环 Von-Neumann 正则性*

吴 俊[1,2], 殷晓斌[1,2]
(1. 南京大学数学系，江苏 南京 210093； 2. 安徽师范大学数学系，安徽 芜湖 241000)

摘 要：环 R 称为 N-环，如果 R 的素根 $N(R)=\{r\in R \mid$ 存在自然数 n 使 $r^n=0\}$. 本文不仅对 N-环进行了刻划，而且还研究了 N-环的 Von Neumann 正则性. 特别证明了：对于 N-环 R，如下条件是等价的：(1)R 是强正则环；(2)R 是正则环；(3)R 是左 SF-环；(4)R 是右 SF-环；(5)R 是 MELT，左 p-V-环；(6)R 是 MERT，右 p-V-环. 因此推广了文献[4]中几乎所有的重要结果，同时也改进或推广了其它某些有关正则环的有用结果.

关键词：正则环；N-环；SF-环；p-V-环.
分类号：AMS(1991) 16E50/CLC O153.3
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)02-0267-06

在本文中，R 均指含有单位元的结合环，R 上的模均指单式模. R 称为正则环[1]，是指对于任意 $a\in R$ 总存在 $b\in R$ 使 $a=aba$. R 称为强正则环[2]，是指对于任意 $a\in R$ 总存在 $b\in R$ 使 $a=ba^2$. 易知，强正则环是 Von-Neumann 正则环. Von-Neumann 正则环及其推广被很多代数工作者所重视(参看[1]-[8]).

记 N_0 为 R 的所有幂零元所组成的集合. 根据 Zorn 引理，R 的所有诣零理想集合中有极大者 $\mathrm{nil}(R)$，且不难看出，此极大者即为 R 的最大的诣零理想，称为 R 的诣零根. 记 $N(R)$ 为 R 的素根. 则有 $N(R)\subset \mathrm{nil}(R)\subset N_0$. 环 R 称为 N- 环[9]，是指 $N_0=N(R)$. 本文的主要目的是对 N- 环进行刻划，同时还要研究 N- 环的 Von-Neumann 正则性. 此外，N- 环与其它一些特殊环之间的关系也被考虑. R 称为半交换环[3]，意指由 $xy=0$ 可以推得 $xRy=0$，其中 $x,y\in R$. 我们发现：

命题 1 半交换环是 N- 环.

证明 由定义易得.

可以验证 $R=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}$，其中 $a,b,c\in Z_2$，$|R|=8$ 是 N- 环，但不是半交换. 故有

命题 2 存在 N- 环 R 不是半交换环.

由命题 1 与命题 2 便知：

$$\{\text{半交换环}\}\subsetneqq\{N\text{- 环}\}.$$

所以本文中所得到的结果是文献[4] 结果的真正推广.

---

* 收稿日期：1998-01-05
作者简介：吴 俊(1964-)，男，安徽庐江人，副教授.

环 R 称为 ZC- 环[7]，是指由 $ab=0$ 可以推出 $ba=0$，其中 $a,b\in R$；R 称为 SZC- 环，是指由 $a_1\cdots a_n=0$ 可以推出 $a_{i_1}\cdots a_{i_n}=0$，其中 $a_1,\cdots,a_n\in R$，$i_1\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 易知，SZC- 环一定是 ZC- 环. 环 R 称为约化的[2]，意指 R 不含非零的幂零元. 我们发现约化环与 SZC- 环之间有如下关系：

命题 3 约化环是 SZC- 环.

证明 只需验证，当 $a_1a_2a_3=0$ 时 a_1,a_2,a_3 的可换性即知.

注 取 $R=Z_8$，由于 R 是可换环，当然 R 是 SZC- 环，但 $\bar{4}\in R$，$\bar{4}\neq 0$，$\bar{4}^2=0$，从而 R 不是约化环. 即命题 3 的逆是不成立的. 故有{约化环} $\subsetneqq$ {SZC- 环}.

命题 4 ZC- 环是半交换环.

证明 若 $a,b\in R$，使 $ab=0$. 由 R 是 ZC- 环知 $ba=0$，由此有 $baR=0$，即 $\forall\, r\in R$，$bar=0$. 由 ZC- 环的定义，有 $\forall\, r\in R$，$arb=0$，即 $aRb=0$. 所以 R 是半交换环.

注 假定 R 是单环. 对于 $a,b\in R$ 使 $aRb=0$，于是 $RaRbR=0$. 由 R 是单环推得 $RaR=0$ 或 $RbR=0$，因此有 $bRa=0$，所以 R 是半交换环. 特别 $M_n(F)$ 是半交换环，其中 F 是除环. 当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\neq 0.$$

所以，当 $n\geqslant 2$ 时，$M_n(F)$ 不是 ZC- 环. 故命题 4 的逆不成立.

至此，我们得到：

$$\{\text{约化环}\}\subsetneqq\{\text{ZC- 环}\}\subsetneqq\{\text{半交换环}\}\subsetneqq\{\text{N- 环}\}.$$

所以研究 N- 环是很有意义的. 特别我们发现：

定理 5 如下条件等价：

(1) R 是 N- 环.

(2) $R/N(R)$ 是约化环.

(3) $R/N(R)$ 是 SZC- 环.

(4) $R/N(R)$ 是 ZC- 环.

(5) $R/N(R)$ 是半交换环.

证明 (1)⇒(2)：如果 $a\in R$ 使 $(\bar{a})^m=\bar{0}\in R/N(R)$，其中 m 是自然数. 即 $\overline{a^m}=\bar{0}$. 于是 $a^m\in N(R)$. 因此存在自然数 n 使 $(a^m)^n=a^{mn}=0$. 所以 $a\in N_0=N(R)$. 由此知 $\bar{a}=\bar{0}\in R/N(R)$. 所以 $R/N(R)$ 是约化环

(2)⇒(3)：由命题 3 即得.

(3)⇒(4)：显然.

(4)⇒(5)：由命题 4 即得.

(5)⇒(1)：如果 $a \in N_0$，即存在自然数 n 使 $a^n = 0$，由此有 $\bar{a}^n = \bar{0} \in R/N(R)$. 由 $R/N(R)$ 的半可换性推得 $(\overline{aR})^n = \bar{0}$. 而 $R/N(R)$ 是半素环，于是 $\overline{aR} = \bar{0}$，于是 $\bar{a} = \bar{0}$，由此可知 $a \in N(R)$. 所以 $N_0 \subset N(R)$. 这就证明了(1) 成立.

定理 6　对于环 R，如下条件等价：

(1)　R 是强正则环.

(2)　R 是半交换正则环.

(3)　R 是正则 N- 环.

证明　(1)⇔(2)：[4] 中定理 1.

(2)⇒(3)：由命题 1 即得.

(3)⇒(1)：由 $N_0 = N(R) \subset J(R) = 0$ 知 R 是约化环，利用([2]，定理 3.2)，则 R 是强正则环.

([4]，定理 1) 是这个定理的直接结果.

由定理 5 和定理 6，有

推论 7　如下条件等价：

(1)　R 是强正则环.

(2)　R 是正则 SZC- 环.

(3)　R 是 ZC-，正则环.

环 R 称为左(右)p- 内射的[5]，指对于 R 的每个主左(右) 理想 L，任意左(右)R- 同态 $f: L \to R$，均可扩到${}_RR(R_R)$ 的自同态.

定理 8　如果 R 是 N- 环，则如下条件等价：

(1)　R 是强正则环.

(2)　R 是约化的左(右)p- 内射环.

(3)　R 是半本原的左(右)p- 内射环.

(4)　R 是左(右) 非奇异的左(右)p- 内射环.

(5)　R 是半素的左(右)p- 内射环.

证明　(1)⇒(2) 与(4)⇒(3)⇒(5) 显然. 故只需证明：

(2)⇒(4)：若 $Z({}_RR) = \{r \in R \mid l(r)$ 在${}_RR$ 的本质上$\} \neq 0$，则存在 $a(\neq 0) \in Z({}_RR)$ 使 $l(a)$ 在${}_RR$ 中是本质的，于是

$$l(a) \cap Ra \neq 0.$$

因此存在 $r \in R$ 使 $ra \neq 0$ 而 $ra^2 = 0$. 由此知 $(ara)^2 = 0$. 由 R 的约化性得 $ara = 0$. 于是又有 $(ra)^2 = 0$ 再由 R 的约化性知 $ra = 0$，此与 $ra \neq 0$ 相矛盾. 所以 $Z({}_RR) = 0$. 同理可证

$$Z(R_R) = 0.$$

(5)⇒(1)：由 R 是半素环知 $N(R) = 0$. 而由已知条件知 $N_0 = 0$，所以 R 是约化环. 于是有左 R- 同态 $f: Ra^2 \to R; ra^2 \to ra, a \in R$. 由 R 是左 p- 内射环知 $f(a^2) = a = a^2b$. 即 R 是强正

则环.

对于 R 是右 p- 内射环的情况,同样可以推出(1) 成立.

([4],定理 8) 是这个定理的直接推论.

R 称为左(右)SF- 环,指每个单左(右)R- 模是平坦模.

定理 9 如下条件等价:

(1) R 是强正则环.

(2) R 是半交换左 SF- 环.

(3) R 是半交换右 SF- 环.

(4) R 是 N- 左 SF- 环.

(5) R 是 N- 右 SF- 环.

证明 (1)⇒(2):显然.

(2)⇒(4):由命题 1 即得.

(4)⇒(1):由 R 是 N- 环及定理 5 知 $R/N(R)$ 是约化环,又 R 是左 SF- 环,根据([8],命题 3.2),则 $R/N(R)$ 也是左 SF- 环,所以 $R/N(R)$ 是约化的,左 SF- 环,根据([1],命题 3.2),则 $R/N(R)$ 是强正则环,从而 $R/N(R)$ 是 duo 环,即 $R/N(R)$ 的每个单边理想是双边理想.于是 R 是左拟 duo 环,即 R 的每个极大左理想是双边理想,根据([8],定理 4.10),由 R 是左 SF- 环即得 R 是强正则环.

(1)⇒(3)⇒(5)⇒(1):类似可证.

([4],定理 2) 是这个定理的直接结果.

由定理 5 和定理 9 得

推论 10 如下条件等价:

(1) R 是强正则环.

(2) $R/N(R)$ 是约化环,R 是左(右)SF- 环.

(3) $R/N(R)$ 是 SZC- 环,R 是左(右)SF- 环.

(4) $R/N(R)$ 是 ZC- 环,R 是左(右)SF- 环.

(5) $R/N(R)$ 是半交换环,R 是左(右)SF- 环.

R 称为左(右) 弱正则环[8],如果对于 R 的任意左(右) 理想 L,有 $L^2 = L$.

定理 11 如果 R 是 N- 环,则 R 是左弱正则环当且仅当 R 是右弱正则环.

证明 (⇒):假定 R 是左弱正则的,则对于任意 $a \in R$ 有 $Ra = RaRa$,所以 $a = ba$,其中 $b \in RaR$.即 $(1-b)a = 0$,从而

$$(a(1-b))^2 = 0.$$

又由 R 的左弱正则性可推得 $J(R) = 0$.根据已知条件,所以

$$a(1-b) \in N_0 = N(R) \subset J(R) = 0$$

于是 $a = ab$,即 $a \in aRaR$.因此 $aR = aRaR$,即 R 是右弱正则的.

(⇐):类似可证.

([4],定理 3) 是上面定理的直接结果.

R 称为 MELT(MERT) 环[6],指 R 的每个极大本质左(右) 理想是双边理想.R 称为左(右)p-V- 环[5],则指每个单左(右)R- 模是 p- 内射的.

定理 12 如下条件等价：

(1) R 是强正则环.

(2) R 是半交换 MELT 左 p-V- 环.

(3) R 是 N-MELT 左 p-V- 环.

(4) R 是半交换 MERT 右 p-V- 环.

(5) R 是 N-MERT 右 p-V- 环.

证明 (1)⇒(2)：显然.

(2)⇒(3)：由命题 1 即得.

(3)⇒(1)：先证 $N_0 = N(R) = 0$.

如果 $N_0 \neq 0$，则存在 $a(\neq 0) \in N_0$ 与 R 的极大左理想 M 使

$$N_0 + l(a) \subset M \subsetneq R.$$

易知有左 R- 同态

$$\varnothing: Ra \to R/M;\ ra \to r + M.$$

由于 R/M 是单左 R- 模，而 R 是左 p-V- 环，从而 R/M 是 p- 内射模，于是存在 $b \in R$ 使

$$1 + M = \varnothing(a) = ab + M.$$

由此知 $1 - ab \in M$. 又 $ab \in N(R) = N_0 \subset M$，所以

$$1 = (1 - ab) + ab \in M.$$

这与 $M \neq R$ 相矛盾. 故 $N_0 = N(R) = 0$.

次证：对于任意 $a \in R$ 有 $Ra + l(a) = R$.

如若不然，则存在 $a \in R$ 使 $Ra + l(a) \neq R$，从而存在 R 的极大左理想 L 使

$$Ra + l(a) \subset L \subsetneq R:$$

(i) 如果 L 不是本质的，则 $L = Re$，其中 $e^2 = e(\neq 1) \in R$. 又由 $N_0 = 0$ 知 $xa = 0$ 当且仅当 $ax = 0$，对于 $x \in R$. 这就说明 $l(a) = r(a) \lhd R$. 所以

$$l(a) = r(a) \supset r(L) = r(Re) = (1 - e)R \neq 0.$$

由此知 $1 - e \in l(a)$. 于是 $1 = (1 - e) + e \in L$，这与 $L \neq R$ 相矛盾.

(ii) 如果 L 是本质的，由 R 是 MELT- 环知 $L \lhd R$，所以 $RaR \subset L$. 易知有左 R- 同态

$$Ra \to R/L; ra \to r + L.$$

由于 R 是左 p-V- 环，故存在 $c \in R$ 使 $1 - ac \in L$ 且 $ac \in L$，因此

$$1 = (1 - ac) + ac \in L,$$

这与 $L \neq R$ 相矛盾.

这就说明了：

$$Ra + l(a) = R,\text{对于所有 } a \in R.$$

由此知，对于任意 $a \in R$，存在 $b \in R, d \in l(a)$ 使 $ba + d = 1$. 于是 $ba^2 = a$，即 R 是强正则环.

(1)⇒(4)⇒(5)⇒(1)：类似可证.

此定理有效地改进了[4]中的定理 4.

由定理 5 和定理 12，有

推论 13 如下条件等价：

(1) R 是强正则环.

(2) $R/N(R)$ 是约化环,R 是 MELT 左 p-V- 环.
(3) $R/N(R)$ 是约化环,R 是 MERT 右 p-V- 环.
(4) $R/N(R)$ 是 SZC- 环,R 是 MELT 左 p-V- 环.
(5) $R/N(R)$ 是 SZC- 环,R 是 MERT 右 p-V- 环.
(6) $R/N(R)$ 是 ZC- 环,R 是 MELT 左 p-V- 环.
(7) $R/N(R)$ 是 ZC- 环,R 是 MERT 右 p-V- 环.
(8) $R/N(R)$ 是半交换环,R 是 MELT 左 p-V- 环.
(9) $R/N(R)$ 是半交换环,R 是 MERT 右 p-V- 环.

本文是在章聚乐教授的悉心指导下完成的,表示由衷的感谢.

参考文献:

[1] RAMAMURTHI V S. *On the injectivity and flatness of certain cyclic modules* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **48**(1): 21—25. [2] GOODEARL K R., *Von Neumann Regular Rings* [M]. Kriegex Publishing Company, Florida, 1991.

[3] HIRANO Y and TOMINAGA H. *Regular rings, V-rings and their generalization* [J]. Hiroshima Math. J., 1979, **9**: 137—149.

[4] DU Xian-neng. *On semicommuative rings and strongly regular rings* [J], Journal of Math. Res. & Exp., 1994, **14**(1): 57—60.

[5] YUE Chi-ming. *On p-injectivity and generalizations* [J]. Riv. Math. Parma, 1996, **22**(5): 183—188.

[6] ZHANG Ju-le, DU Xian-neng. *Von Neumann regularity of SF-rings* [J]. Comm. in Algebra, 1993, **21**(7): 2445—2451.

[7] 章聚乐. 关于非奇异环 [J]. 安徽师大学报(自然科学版), 1986, **9**(4): 6—11.
ZHANG Ju-le. *On nonsingular rings* [J]. J. Anhui Normal Univ (Natural Sci.), 1986, **9**(4): 6—11 (in Chinese).

[8] REGE M B. *On Von Neumann regular rings and SF-rings* [J]. Math. Japanica, 1986, **31**: 927—936.

[9] HIRANO Y. *Some studies on strongly π-regular rings* [J]. Math. J. Okayam University, 1978, **20**: 141—149.

Von-Neumann Regularity of N-rings

WU Jun[1,2], YIN Xiao-bin[1,2]

(1. Dept. of Math., Nanjing University, Jiangsu 210093, China;
2. Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu, 241000, China)

Abstract: A ring R is called a N-ring if $N(R)=\{r\in R|$ there is a natural number n such that $r^n=0\}$. In this paper, some new characterization of N-rings are given. Furthermore, the Von Neumann regularity of N-rings is also considered. Particularly, we show the following result: for a N-ring R, the following conditions are equivalent: (1) R is a strongly regular ring; (2) R is a regular ring; (3) R is a left SF-ging; (4) R is right SF-ring; (5) R is a MELT, left p-V-ring; (6) R is a MERT, right p-V-ring.

Key words: regular rings; N-rings; SF-rings; SF-rings; p-V-rings.