第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2001

二面体群的小度数 Cayley 图的同构类的计数*

陈进之[1]， 王汝楫[2]
（1. 长沙大学数学系，湖南 长沙 410003； 2. 首都师范大学数学系，北京 100037）

摘 要：设 G 是有限群，S 是 G 的一个不包含单位元的非空子集且满足 $S^{-1}=S$，定义群 G 关于 S 一个的 Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 如下：$V(X)=G, E(X)=\{(g,sg)\mid g\in G, s\in S\}$. 对于素数 p，本文给出了 $2p$ 阶的二面体群的 3 度和 4 度 *Cayley* 图的同构类的个数.

关键词：二面体群；Cayley 图；图的同构.
分类号：AMS(1991) 05C25, 20B25/CLC O152.1
文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0273-08

1 引 言

设 G 是一个有限群，S 是 G 的一个不包含单位元 1 的非空子集且满足 $S^{-1}=S$（以下称这样的子集为 G 的 Cayley 子集）. 定义群 G 关于 S 的一个 Cayley 图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$ 如下：$V(X)=G, E(G)=\{(g,sg)\mid g\in G, s\in S\}$. 这是一个无向图.

近年来，Cayley 图的研究十分活跃，这不仅是因为它是构造对称性较强的图的一种方法，而且也因为它是构作互连网络的数学模型，在信息科学、交通运输以及计算机科学中都有着重要的作用. Cayley 图的同构和分类问题是 Cayley 图研究中的一个重要问题，而研究同构又是为了解决分类问题. 自 60 年代末开始，有大量的文献致力于同构问题的研究，例如可见综述文章[1,4,5]. 但是，Cayley 图分类的研究似乎还没有充分展开，近几年来，我们只看到文献[3]利用交换群的小度数 Cayley 图的同构问题的结果给出了这些图的分类. 本文的目的是利用二面体群的 Cayley 图的同构问题的研究成果对这类图的分类做一些研究. 我们先叙述一下有关的概念和结果.

设 G 是一个有限群，S 是 G 的一个 Cayley 子集. 设 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$，而容易验证，$\mathrm{Cay}(G,S)\simeq\mathrm{Cay}(G,S^{\alpha})$. 另一方面，称 Cayley 子集 S 为 G 的 CI- 子集，如果对任意的同构 $\mathrm{Cay}(G,S)\simeq\mathrm{Cay}(G,T)$，存在 $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$，使 $S^{\alpha}=T$. 进一步，称 G 为 CI- 群，如果 G 的每个 Cayley 子集都是 CI- 子集. 设 G 是一个 CI 群，G 的所有 Cayley 子集构成的集合记为 Ω，那么 $\mathrm{Aut}(G)$ 依自然方式作用于 Ω. 于是，有

* 收稿日期：1999-06-01
基金项目：北京市自然科学基金资助项目(19920003)
作者简介：陈进之(1941-)，男，副教授.

引理 1 设 G 是一个 CI- 群，Ω 如上述，则 $\mathrm{Cay}(G,S) \simeq \mathrm{Cay}(G,T)$ 当且仅当 S 与 T 属于 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 Ω 上的同一条轨道.

这个引理表明，求 CI 群 G 的 Cayley 图的同构类相当于求 $\mathrm{Aut}(G)$ 在 Ω 上的轨道，特别地，若只考察 G 的一个固定度数的 Cayley 图，即若 $|S|$ 为给定的 d 时，显然，Ω 可以取为 G 的所有含 d 个元素的 Cayley 子集构成的集合.

Babai 在[2] 中证明了下面的

引理 2 设 p 是一个素数，则 $2p$ 阶二面体群 D_{2p} 是 CI 群.

本文就是利用这个结果并依据引理 1 来计算 D_{2p} 的小度数(3 度和 4 度) 的 Cayley 图的同构类的个数. 主要结果是

定理 1 设 p 是一个素数，D_{2p} 是 $2p$ 阶二面体群.

(1) D_{2p} 的 3 度 Cayley 图必是连通的，记它们的同构类的个数为 n，那么，对 $p=2$，有 $n=1$，对 $p=3$，有 $n=2$；对 $p>3$，则当 $3|p-1$ 时，$n=\frac{p+5}{6}+1$；当 $3\nmid p-1$ 时，$n=\frac{p+1}{6}+1$，其中，$\frac{p+5}{6}$ 和 $\frac{p+1}{6}$ 分别是二部图的个数.

(2) 记 $D_{2p}(p>2)$ 的连通的 4 度 Cayley 图的同构类的个数为 n，则当 $12|p-1$ 时，$n=[\frac{(p-1)^2}{24}+1]+\frac{p-1}{2}$；当 $3|p-1$ 而 $4\nmid p-1$ 时，$n=[\frac{(p-1)^2}{24}+\frac{1}{2}]+\frac{p-1}{2}$；当 $3\nmid p-1$ 而 $4|p-1$ 时，$n=[\frac{(p-1)^2}{24}+\frac{1}{3}]+\frac{p-1}{2}$；当 $3\nmid p-1$ 且 $4\nmid p-1$ 时，$n=[\frac{(p-1)^2}{24}-\frac{1}{6}]+\frac{p-1}{2}$，其中，方括号中的和分别是二部图的个数.

又，$D_{2p}(p>3)$ 的不连通的 4 度 Cayley 图是 p 阶循环群的两个同构的 4 度 Cayley 图的并，记它们的同构类的个数为 n，则当 $4|p-1$ 时，$n=\frac{p-1}{4}$；当 $4\nmid p-1$ 时，$n=\frac{p-3}{4}$.

本文仅给出定理之(2) 的证明，其它结论的证明与(2) 相同且更简单，故从略.

2 定理的证明

为了计算群 G 作用于集合 Ω 时的轨道个数，要用下面的 Burnside 引理.

引理 3 设有限群 G 作用在有限集 Ω 上，记 G 在 Ω 上有 n 条轨道，那么，

$$n=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\mathrm{Fix}_{\Omega}(x)|$$

依照引理 1 和引理 2，先考察二面体群的自同构群. 本文总设 p 为素数，D_{2p} 是 $2p$ 阶二面体群且有下面的定义关系：

$$D_{2p}=\langle a,b \mid a^p=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$$

还记 $A=\mathrm{Aut}(D_{2p})$.

引理 4 设 D_{2p} 是 $2p$ 阶二面体群，r 是模 p 的一个原根，令映射 σ 和 τ 分别为

$$\begin{cases} a^\sigma = a, \\ b^\sigma = ba; \end{cases} \quad \begin{cases} a^\tau = a^r, \\ b^\tau = b. \end{cases}$$

那么,(1)σ 和 τ 诱导了 D_{2p} 的两个自同构且

$$A = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^p = \tau^{p-1} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^r \rangle$$

这是一个 $p(p-1)$ 阶群.

(2) A 的元素的共轭类共有 p 个,它们是 $C_1 = \{1\}$,$C_2 = \{\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{p-1}\}$ 和 $C_3^{(i)} = \{\tau^i, \tau^i\sigma, \cdots, \tau^i\sigma^{p-1}\}(i = 1,2,\cdots,p-2)$.

证明 (1) 显然,σ,τ 诱导了 D_{2p} 的两个自同构. 直接可验证,$\sigma^p = \tau^{p-1} = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^r$ 且 $\langle\sigma,\tau\rangle$ 是一个 $p(p-1)$ 阶群. 又,若 $\alpha \in A$,则 a^α 和 b^α 的可能取法分别为 $a^i(i = 1,2,\cdots,p-1)$ 和 $ba^j(j = 0,1,\cdots,p-1)$. 然而,α 和 a^α 和 b^α 唯一确定,故 $|A| \leqslant p(p-1)$. 因此,必有 $A = \langle\sigma,\tau\rangle$.

(2) 因为 $(\tau^n\sigma^m)^{-1}\sigma(\tau^n\sigma^m) = \sigma^{-m}\tau^{-n}\sigma\tau^n\sigma^m = \sigma^{-m}\sigma^{r^n}\sigma^m = \sigma^{r^n}$,故 σ 所在的共轭类为 $C_2 = \{\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{p-1}\}$. 又,$(\tau^n\sigma^m)^{-1}\tau^i(\tau^n\sigma^m) = \sigma^{-m}\tau^{-n}\tau^i\tau^n s^m = \sigma^{-m}\tau^i\sigma^m = \tau^i\sigma^{m(1-r^i)}$,然而,对于 $i = 1,2,\cdots,p-2$,有 $r^i - 1 \not\equiv 0 \pmod p$,故 τ^i 所在的共轭类为 $C_3^{(i)} = \{\tau^i, \tau^i\sigma, \cdots, \tau^i\sigma^{p-1}\}(i = 1,2,\cdots,p-2)$.

注意,本文以下的 σ 和 τ 均指引理 4 所示.

现在开始证明定理之(2).

对于 4 度的 Cayley 图 $\mathrm{Cay}(D_{2p}, S)$,有 $|S| = 4$. 这时,由 $S^{-1} = S$ 知 S 必是下面三种类型之一:

类型 Ⅰ. $\{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}$,其中 $m_1, m_2, m_3, m_4 \pmod p$ 互不相同.

类型 Ⅱ. $\{a^k, a^{-k}, ba^m, ba^n\}$,其中 $k \not\equiv 0, m \not\equiv n \pmod p$.

类型 Ⅲ. $\{a^k, a^{-k}, a^l, a^{-l}\}$,其中 $k, l \not\equiv 0, k \not\equiv \pm l \pmod p$.

这三类 Cayley 子集中,仅类型 Ⅲ 子集给出 D_{2p} 的不连通的 Cayley 图.

显然,在 A 的作用下,任意两个不同类型的 Cayley 子集都不会在 A 的同一条轨道中. 因此,可以分别考察 A 在全体类型 Ⅰ, Ⅱ 或 Ⅲ 的 Cayley 子集的集合上的作用.

从引理 5 到引理 7,先来考察类型 Ⅰ 的情况. 考虑到 $S = \{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}$ 是无序集,它在下面的证明中处理起来不方便,引入集合

$$\Omega = \{(ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}) \mid m_1, m_2, m_3, m_4 \text{ 模 } p \text{ 互不相同}\},$$

这里,总用$\{\cdots\}$表示无序组而用$(\cdots)$表示有序组. 此外,令外直积

$$G = S_4 \times A,$$

其中,S_4 是 $\{1,2,3,4\}$ 上的对称群. 定义映射 $\varphi: G \times \Omega \to \Omega$ 如下,对任意 $(h,\alpha) \in G$ 和 $(ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}) \in \Omega$,其中 $h \in S_4, \alpha \in A$,令

$$(ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4})^{(h,\alpha)} = ((ba^{m_{1^{h^{-1}}}})^\alpha, (ba^{m_{2^{h^{-1}}}})^\alpha, (ba^{m_{3^{h^{-1}}}})^\alpha, (ba^{m_{4^{h^{-1}}}})^\alpha). \tag{1}$$

直接验证可知,φ 是 G 在 Ω 上的一个作用. A 在所有 Ⅰ 型子集构成的集合上的轨道形如 $\{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}^A$,在 Ω 上的轨道形如 $(ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4})^G$. 对这些轨道,有下面的事实

引理 5 $\{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}^A = \{ba^{n_1}, ba^{n_2}, ba^{n_3}, ba^{n_4}\}^A$ 当且仅当 $(ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4})^G = (ba^{n_1}, ba^{n_2}, ba^{n_3}, ba^{n_4})^G$.

证明 注意到$\{\cdots\}$和$(\cdots)$分别表示无序组和有序组,就有 $\{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}^A = \{ba^{n_1}, ba^{n_2}, ba^{n_3}, ba^{n_4}\}^A \Leftrightarrow$ 存在 $\alpha \in A$ 使得 $\{ba^{m_1}, ba^{m_2}, ba^{m_3}, ba^{m_4}\}^\alpha = \{ba^{n_1}, ba^{n_2}, ba^{n_3}, ba^{n_4}\} \Leftrightarrow$ 存在

$h \in S_4$ 和 $\alpha \in A$ 使得对于 $i = 1,2,3,4$ 有 $ba^{n_i} = (ba^{m_{i^{h^{-1}}}})^{\alpha} \Leftrightarrow$ 存在$(h,\alpha) \in G$ 使得$(ba^{m_1},ba^{m_2},ba^{m_3},ba^{m_4})^{(h,\alpha)} = (ba^{n_1},ba^{n_2},ba^{n_3},ba^{n_4}) \Leftrightarrow (ba^{m_1},ba^{m_2},ba^{m_3},ba^{m_4})^G = (ba^{n_1},ba^{n_2},ba^{n_3},ba^{n_4})^G$.

进一步,令

$$\Omega' = \{(m_1,m_2,m_3,m_4) \mid 对\ i = 1,2,3,4,有\ 0 \leqslant m_i < p\ 且\ m_i\ 互不相同\}$$

显然$(ba^{m_1},ba^{m_2},ba^{m_3},ba^{m_4}) \to (m_1,m_2,m_3,m_4)$ 是 Ω 到 Ω' 的一个一一映射(这时的 m_i 都是按模 p 取余计算的). 又,若 $\alpha \in A$ 且满足 $a^{\alpha} = a^x, b^{\alpha} = ba^y$,则$(ba^m)^{\alpha} = ba^{mx+y}$,那么,容易知道 G 在 Ω 上的作用就依下列方式诱导了 G 在 Ω' 上的一个等价的作用,即

$$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{(h,\alpha)} = (m_{1^{h^{-1}}}x + y, m_{2^{h^{-1}}}x + y, m_{3^{h^{-1}}}x + y, m_{4^{h^{-1}}}x + y). \qquad (2)$$

这样,当考虑了 G 在 Ω 上的作用时,将不再区别 Ω 和 Ω' 而直接用(2)式代替(1)式. 于是,为了计算由类型 Ⅰ 的 Cayley 子集生成的 G 的 Cayley 图的同构类的个数,只须计算 G 在 Ω' 上的轨道数.

不难证明

引理 6 设 G 作用于集合 Ω,那么,G 的共轭元素在 Ω 上有相同个数的不动点.

根据这个引理,为了计算 G 的每个元素的不动点数,只要计算 G 的每个共轭类的一个代表元的不动点数.

引理 7 D_{2p} 关于类型 Ⅰ 的子集的 Cayley 图都是双图,它们的同构类的个数 n 如下:当 $12 \mid p-1$ 时,$n = \dfrac{(p-1)^2}{24} + 1$;当 $3 \mid p-1$ 而 $4 \nmid p-1$ 时,$n = \dfrac{(p-1)^2}{24} + \dfrac{1}{2}$;当 $3 \nmid p-1$ 而 $4 \mid p-1$ 时,$n = \dfrac{(p-1)^2}{24} + \dfrac{1}{3}$;当 $3 \nmid p-1$ 且 $4 \nmid p-1$ 时,$n = \dfrac{(p-1)^2}{24} - \dfrac{1}{6}$.

证明 D_{2p} 关于类型 Ⅰ 的子集的 Cayley 图都是双图为显然. 下面计算同构类的个数. S_4 有 5 个共轭类,它们的代表元可以分别取为 $h = 1,(12),(12)(34),(123)$ 和(1234);依引理 4,A 有 p 个共轭类,它们的代表元可以分别取为 $\alpha = 1,\sigma,\tau^i (i = 1,2,\cdots,p-2)$. 进一步地,不难得到,$G$ 有 $5p$ 个共轭类,它们的代表可以分别取为$(h,1)$,(h,σ) 和(h,τ^i),其中,h 如上所取而 $i = 1,2,\cdots,p-2$. 显然,$|\mathrm{Fix}_{\Omega}(1,1)| = |\Omega| = p(p-1)(p-2)(p-3)$,而当 $h \neq 1$ 时,$|\mathrm{Fix}_{\Omega}(h,1)| = 0$. 又设$(m_1,m_2,m_3,m_4) \in \mathrm{Fix}_{\Omega}(h,\sigma)$,注意 σ 的定义,由式(2)得$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{(h,\sigma)} = (m_{1^{h^{-1}}} + 1, m_{2^{h^{-1}}} + 1, m_{3^{h^{-1}}} + 1, m_{4^{h^{-1}}} + 1) = (m_1,m_2,m_3,m_4)$. 因为$(\cdots)$是有序组,故对 $j = 1,2,3,4$,有 $m_{j^{h^{-1}}} + 1 \equiv m_j$(这里的同余式是对 p 取模的,以下均同). 于是,$\sum_{j=1}^{4}(m_{j^{h^{-1}}} + 1) = \sum_{j=1} m_j$,从而 $4 \equiv 0$,这与 $p > 2$ 矛盾. 因此,$|\mathrm{Fix}_{\Omega}(h,\sigma)| = 0$.

现在,计算 $|\mathrm{Fix}_{\Omega}(h,\tau^i)| (i = 1,2,\cdots,p-2)$. 设$(m_1,m_2,m_3,m_4) \in \mathrm{Fix}_{\Omega}(h,\tau^i)$. 注意 $a^{\tau^i} = a^{r^i}, b^{\tau^i} = b$. 由式(2),就有

$$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{(h,\tau^i)} = (m_{1^{h^{-1}}}r^i, m_{2^{h^{-1}}}r^i, m_{3^{h^{-1}}}r^i, m_{4^{h^{-1}}}r^i) = (m_1,m_2,m_3,m_4) \qquad (3)$$

于是,对 $j = 1,2,3,4$,有 $m_{j^{h^{-1}}}r^i \equiv m_j$ 成立. 下面对 h 进行讨论.

情形 1 $h = 1$. 由式(3)知,对 $j = 1,2,3,4$,有 $m_j r^i \equiv m_j$,从而,$(r^i - 1)m_j \equiv 0$. 但是,对 $i = 1,2,\cdots,p-2$,有 $r^i - 1 \not\equiv 0$,于是 $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m_4 \equiv 0$,这不可能. 因此 $|\mathrm{Fix}_{\Omega}(1,\tau^i)| = 0 (i = 1,2,\cdots,p-2)$.

情形 2　$h=(12)$. 这时式(3)既为$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{((12),r^i)}=(m_2r^i,m_1r^i,m_3r^i,m_4r^i)=(m_1,m_2,m_3,m_4)$，这等价于方程组

$$\begin{cases} m_1r^i\equiv m_2, \\ m_2r^i\equiv m_1, \\ m_3r^i\equiv m_3, \\ m_4r^i\equiv m_4. \end{cases}$$

由此得 $m_3\equiv m_4\equiv 0$，与 Ω 的定义矛盾，因此 $|\mathrm{Fix}_{\Omega}((12),\tau^i)|=0(i=1,2,\cdots,p-2)$.

情形 3　$h=(12)(34)$. 这时式(3)既为$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{((12)(34),r^i)}=(m_2r^i,m_1r^i,m_4r^i,m_4r^i)=(m_1,m_2,m_3,m_4)$，这等价于方程组

$$\begin{cases} m_1r^i\equiv m_2, \\ m_2r^i\equiv m_1, \\ m_3r^i\equiv m_4, \\ m_4r^i\equiv m_3. \end{cases}$$

由 Ω 的定义，m_1,m_2 不能同时模 p 为 0，那么，从前两个同余式知，m_1,m_2 模 p 都不为 0. 前两个同余式的两边分别相乘得 $m_1m_2r^{2i}\equiv m_1m_2$，于是，$r^{2i}\equiv 1$. 进而，$r^2$ 在乘法群 Z_p^* 中的阶 $o(r^2)=\frac{p-1}{2}$，故$\frac{p-1}{2}|i$. 于是，方程组有解当且仅当 $i=\frac{p-1}{2}$. 进一步地就知，不动点为$(m_1,m_2,m_3,m_4)=(m_1,-m_1,m_3,-m_3)$. 又，有序组中 4 个元素 p 互不相同当且仅当 $m_1\not\equiv\pm m_3$，因此，仅当$i=\frac{p-1}{2}$时，$|\mathrm{Fix}_{\Omega}((12)(34),\tau^i)|=(p-1)(p-3)$，否则，$|\mathrm{Fix}_{\Omega}((12)(34),\tau^i)|=0$.

情形 4　$h=(123)$. 这时式(3)既为$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{((123),r^i)}=(m_3r^i,m_1r^i,m_2r^i,m_4r^i)=(m_1,m_2,m_3,m_4)$，这等价于方程组

$$\begin{cases} m_1r^i\equiv m_2, \\ m_2r^i\equiv m_3, \\ m_3r^i\equiv m_1, \\ m_4r^i\equiv m_4. \end{cases}$$

与情形 3 同理可知，$m_1,m_2,m_3\not\equiv 0$ 而 $m_4\equiv 0$ 且 $r^{3i}=1$. 于是 $o(r^3)|i$. 下面分两种情况：

1) 当 $3|p-1$ 时，有 $o(r^3)=\frac{p-1}{(3,p-1)}=\frac{p-1}{3}$. 于是$\frac{p-1}{3}|i$，故 $i=\frac{p-1}{3},\frac{2(p-1)}{3}$. 此时，不动点为$(m_1,m_2,m_3,m_4)=(m_3r^i,m_3r^{2i},m_3,0)$，其中 $m_3\not\equiv 0$. 因此，仅当 $i=\frac{p-1}{3},\frac{2(p-1)}{3}$时，$|\mathrm{Fix}_{\Omega}((123),\tau^i)|=p-1$，否则，$|\mathrm{Fix}_{\Omega}((123),\tau^i)|=0$.

2) 当 $3\nmid p-1$ 时，有 $o(r^3)=\frac{p-1}{(3,p-1)}=p-1$. 于是 $p-1|i$，这与 $i=1,2,\cdots,p-2$ 矛盾. 因此 $|\mathrm{Fix}_{\Omega}((123),\tau^i)|=0(i=1,2,\cdots,p-2)$.

情形 5　$h=(1234)$. 这时式(3)既为$(m_1,m_2,m_3,m_4)^{((1234),r^i)}=(m_4r^i,m_1r^i,m_2r^i,m_3r^i)=(m_1,m_2,m_3,m_4)$，这等价于方程组

$$\begin{cases} m_1 r^i \equiv m_2, \\ m_2 r^i \equiv m_3, \\ m_3 r^i \equiv m_4, \\ m_4 r^i \equiv m_1. \end{cases}$$

与情形 3 同理可知，$r^{4i}=1$. 于是 $o(r^4)\mid i$. 下面分两种情况：

1）当 $4\mid p-1$ 时，有 $o(r^4)=\frac{p-1}{(4,p-1)}=\frac{p-1}{4}$. 于是$\frac{p-1}{4}\mid i$，故 $i=\frac{p-1}{4},\frac{2(p-1)}{4},\frac{3(p-1)}{4}$. 此时，不动点为 $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(m_4r^i,m_4r^{2i},m_4r^{3i},m_4)$，其中 $m_4\not\equiv 0$. 但是，当 $i=\frac{2(p-1)}{4}$ 时，有 $m_2=m_4r^{2i}=m_4$，这不可能. 因此，仅当 $i=\frac{p-1}{4},\frac{3(p-1)}{4}$ 时，$|\mathrm{Fix}_\Omega((123),\tau^i)|=p-1$，否则，$|\mathrm{Fix}_\Omega((123),\tau^i)|=0$.

2）当 $4\nmid p-1$ 时，有 $o(r^4)=\frac{p-1}{(4,p-1)}=\frac{p-1}{2}$. 于是$\frac{p-1}{2}\mid i$，故 $i=\frac{p-1}{2}$，从而有 $m_2=m_4r^{2i}=m_4$，这不可能，因此 $|\mathrm{Fix}_\Omega((123),\tau^i)|=0(i=1,2,\cdots,p-2)$.

综合起来可知，仅上述某些 $|\mathrm{Fix}_\Omega(h,\tau^i)|$ 不为零. 为清楚起见，对 $12\mid p-1$ 的情况，把相应的非零的不动点数列在下面的表中. 表中的第一行是 τ^i 的指数 i，第二列的 1,6,3,8,6 分别是 S_4 中与代表元 $h=1,(12),(12)(34),(123),(1234)$ 共轭的元素的个数 c，h- 行和 i- 列的交叉处是 $|\mathrm{Fix}_\Omega(h,\tau^i)|$，"不动点数共计"是指 $\sum\limits_{h\in S_4}|\mathrm{Fix}_\Omega(h,\tau^i)|$（$i$ 如表的第一行所示，并注意到固定的代表元 h 和 i，在 G 中与 (h,τ^i) 共轭的元素有 cp 个）.

		0	$\frac{p-1}{4}$	$\frac{p-1}{3}$	$\frac{p-1}{2}$	$\frac{2(p-1)}{3}$	$\frac{3(p-1)}{4}$
1	1	$\lvert\Omega\rvert$	0	0	0	0	0
(12)	6	0	0	0	0	0	0
(12)(34)	3	0	0	0	$(p-1)(p-3)$	0	0
(123)	8	0	0	$p-1$	0	$p-1$	0
(1234)	6	0	$p-1$	0	0	0	$p-1$
不动点数共计		$\lvert\Omega\rvert$	$6p(p-1)$	$8p(p-1)$	$3(p-1)(p-3)$	$8p(p-1)$	$6p(p-1)$

限于篇幅，对于其它情况不再列表，仅综合叙述如下：除了总有 $|\mathrm{Fix}_\Omega(1,1)|=|\Omega|$ 外，当 $3\mid p-1$ 而 $4\nmid p-1$ 时，仅有 $|\mathrm{Fix}_\Omega((12)(34),r^{\frac{p-1}{2}})|=(p-1)(p-3)$，$|\mathrm{Fix}_\Omega((123),\tau^i)|=p-1(i=\frac{p-1}{3},\frac{2(p-1)}{3})$；当 $3\nmid p-1$ 而 $4\mid p-1$ 时，仅有 $|\mathrm{Fix}_\Omega((12)(34),\tau^{\frac{p-1}{2}})|=(p-1)(p-3)$，$|\mathrm{Fix}_\Omega((1234),\tau^i|=p-1(i=\frac{p-1}{4},\frac{3(p-1)}{4})$；当 $3\nmid p-1$ 且 $4\nmid p-1$ 时，仅有 $|\mathrm{Fix}_\Omega((12)(34),\tau^{\frac{p-1}{2}})|=(p-1)(p-3)$.

最后，由 Burnside 引理，G 在 Ω 中的轨道数 n 如下：

当 $12\mid p-1$ 时，有

$$n=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)+6p(p-1)+8p(p-1)+3p(p-1)(p-3)+8p(p-1)+6p(p-1)}{24p(p-1)}$$
$$=\frac{(p-1)^2}{24}+1;$$

当 $3|p-1$ 而 $4\nmid p-1$ 时，有

$$n=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)+8p(p-1)+3p(p-1)(p-3)+8p(p-1)}{24p(p-1)}$$
$$=\frac{(p-1)^2}{24}+\frac{1}{2};$$

当 $3\nmid p-1$ 而 $4|p-1$ 时，有

$$n=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)+6p(p-1)+3p(p-1)(p-3)+6p(p-1)}{24p(p-1)}$$
$$=\frac{(p-1)^2}{24}+\frac{1}{3};$$

当 $3\nmid p-1$ 而 $4\nmid p-1$ 时，有

$$n=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)+3p(p-1)(p-3)}{24p(p-1)}=\frac{(p-1)^2}{24}-\frac{1}{6}.$$

引理 8 D_{2p}关于类型 Ⅰ 的 Cayley 子集得到的 Cayley 图为连通图，它们的同构类的个数为$\frac{p-1}{2}$.

证明 这时，有 $S=\{a^i,a^{-i},ba^j,ba^k\}$. 又记 $i,-i,j$ 和 k 分别为 m_1,m_2,m_3 和 m_4. 不难看出应当取 $\Omega=\{(a^{m_1},a^{m_2},ba^{m_3},ba^{m_4})\mid m_2\equiv -m_1\not\equiv 0,m_3\not\equiv m_4(\bmod p)\}$ 而 $G=W_4\times \mathrm{Aut}(D_{2p})$，其中，$W_4=\{1,(12),(34),(12)(34)\}$，并且 G 以下列方式作用于 Ω：

$$(a^{m_1},a^{m_2},ba^{m_3},ba^{m_4})^{(h,\alpha)}=((a^{m_{1^{h^{-1}}}})^\alpha,(a^{m_{2^{h^{-1}}}})^\alpha,(ba^{m_{3^{h^{-1}}}})^\alpha,(ba^{m_{4^{h^{-1}}}})^\alpha).$$

计算的细节留给读者. □

引理 9 $D_{2p}(p>3)$ 的不连通的 4 度 Cayley 图是 p 阶循环群的两个同构的 4 度 Cayley 图的并，记它们的同构类的个数为 n，则当 $4|p-1$ 时，$n=\frac{p-1}{4}$；当 $4\nmid p-1$ 时，$n=\frac{p-3}{4}$.

证明 这时，有 $S=\{a^k,a^{-k},a^l,a^{-l}\}$. 又记 $k,-k,l$ 和 $-l$ 分别为 m_1,m_2,m_3 和 m_4. 不难看出应当取 $\Omega=\{(a^{m_1},a^{m_2},a^{m_3},a^{m_4})\mid m_2\equiv -m_1\not\equiv 0,m_3\equiv -m_4\not\equiv 0$ 且 $m_1\not\equiv \pm m_3\}$ 而 $G=D_8\times \mathrm{Aut}(D_{2p})$，其中，$D_8=\{1,(1324),(1423),(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，并且 G 以下列方式作用于 Ω：

$$(a^{m_1},a^{m_2},a^{m_3},a^{m_4})^{(h,\alpha)}=((a^{m_{1^{h^{-1}}}})^\alpha,(a^{m_{2^{h^{-1}}}})^\alpha,(a^{m_{3^{h^{-1}}}})^\alpha,(a^{m_{4^{h^{-1}}}})^\alpha).$$

计算的细节留给读者. □

综合引理 7— 引理 9 就完成了定理之(2) 的证明.

注 实际上，对于类型 Ⅰ 和类型 Ⅲ 不难给出在这些子情况下的完全分类. 例如，设 $S=\{a^i,a^{-i},ba^k,ba^l\}$，让 A 作用于所有类型 Ⅰ 的 Cayley 子集构成的集合，来求 A 的轨道的代表元. 因为 $i\not\equiv 0$，故存在 s 满足 $is\equiv 1$. 在 A 中取 α：$a^\alpha=a^s,b^\alpha=ba^{-ks}$，则 $S^\alpha=\{a,a^{-1},b,ba^{(l-k)s}\}$（注意 $k\not\equiv l(\bmod p)$）. 这说明，若令 $S_k=\{a,a^{-1},b,ba^k\}$，那么，只要在$\{S_k\mid k=1,2,\cdots,p-1\}$ 中找代表元即可. 又，在 A 中取 β：$a^\beta=a,b^\alpha=ba^{-k}$，则 $S_k^\beta=\{a,a^{-1},ba^{-k},b\}$. 从而，只要考虑$\{S_k\mid k=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$. 断言任何两个 S_k 和 $S_l(1\leqslant k\leqslant l\leqslant\frac{p-1}{2})$ 都不在 A 的同一轨道，

若否,就存在 $\alpha \in A$,使得 $S_k^\alpha = S_l$. 显然,只可能 $a^\alpha = a$ 或 a^{-1},$b^\alpha = b$ 或 ba^l. 利用 $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant \frac{p-1}{2}$ 不难验证,这些情况的哪一种都不可能. 于是,所要求的全体轨道的完全代表系可以取作 $\{S_k \mid k = 1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$,因此,还知 D_{2p} 的相应的 Cayley 图的同构类的个数为 $\frac{p-1}{2}$. 类似地,让 A 作用于所有类型 Ⅱ 的 Cayley 子集构成的集合. 取一个模 p 的原根 r,令 $S_k = \{a, a^{-1}, a^{r^k}, a^{-r^k}\}$,那么,全体轨道的完全代表系可以如下取:当 $4 \mid p-1$ 时,$\{S_k \mid k = 1,\cdots,\frac{p-1}{4}\}$;当 $4 \nmid p-1$ 时,$\{S_k \mid k = 1,\cdots,\frac{p-3}{4}\}$.

最后指出,尚且不能对引理 7 中的每个同构类给出它的代表元,即没有给出 D_{2p} 的 4 度 Cayley 图的完全分类,仅仅完成了同构类的计数问题.

参考文献:

[1] ALSPACH B. *Isomorphism of Cayley graphs on abelian groups, in Graph symmetry: Algebraic Methods and Applications* [J]. NATO ASI Ser. C., 1997, **497**: 1—22.

[2] BABAI L. *Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures* [J]. Acta. Math. Acad. Sci. Hunger, 1977, **29**: 329—336.

[3] LI Cai-heng. *Isomorphism and claaification of Cayley graphs of small valencies on finite abelian groups* [J]. Astralasian Journal of Combinatorics, 1995, **12**: 3—14.

[4] PRAEGER C E. *Finite transitive permutation groups and finite vertex-transitive graphs, in Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications* [J]. NATO ASI Ser. C., 1997, **497**: 277—318.

[5] XU Ming-yao. *Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs* [J]. Discrete Math., 1998, **182**: 309—319.

Enumeration of Isomorphism Types of Cayley Graphs of Small Valencies on Dihedral Groups

CHEN Jin-zhi[1], WANG Ru-ji[2]

(1. Dept. of Math., Changsha University, Changsha 410003, China;
2. Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract: Let G be a finite group and a subset of G not containing the identity element of G. A Cayley graph $X = \mathrm{Cay}(g,S)$ of G with S is defined by $V(X) = G$, $E(X) = \{(g,sg) \mid g \in G, s \in S\}$. In this paper, we calculate the number of isomorphism types of all Cayley graphs of valencies 3 and 4 of dihedral groups of order twice a prime.

Key words: dihedral group; Cayley graph; isomorphisms of graphs.