第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

在 $\pi_n(x)$ 零点上的(0,1,3)插值*

谢 四 清
(南京师范大学数学与计算机科学学院，江苏 南京 210097)

摘 要：本文讨论了 n 为奇数时 $\pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ 零点上的(0,1,3)插值的正则性及收敛性，其中 P_{n-1} 表示 $n-1$ 次 Legendre 多项式.

关键词：插值；正则性；收敛性.
分类号：AMS(1991) 41A05/CLC O174.42
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)02-0287-08

1 引 言

设

$$X:-1\leqslant x_1<\cdots<x_n\leqslant 1 \tag{1}$$

是一个任意的节点组，$0=m_0<m_1<\cdots<m_{q-1}$ 是任意的正整数序列，则 X 上的 $(0,m_1,\cdots,m_{q-1})$ 插值问题是寻找 $nq-1$ 次多项式，使其 m_i 阶导数在节点组 X 上取预先给定的值. 如果对任意给定的值，这个问题均是唯一可解的，则称 X 上的 $(0,m_1,\cdots,m_{q-1})$ 插值是正则的；否则称为奇异的.

现假设(1)是由 $\pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)$ 的零点所组成，其中 P_{n-1} 表示 $n-1$ 次 Legendre 多项式. 在这种情况下，为了讨论插值的正则性以及插值过程的收敛性，一般对上述插值问题的端点条件稍作修改并仍称修改后的插值为 $(0,m_1,\cdots,m_{q-1})$ 插值. 这是实插值的一个有趣的问题. 在近四十年的时间里，许多数学家对这种问题进行了研究. 例如，[1]，[2]，[3]，[4]考虑了(0,2)插值；[3]和[5]考虑了(0,1,3)插值；[6]考虑了(0,1,2,4)插值；[7]和[8]考虑了(0,3)插值；[9]考虑了(0,2,3)插值. 在最近的一篇论文中，文[10]对所有这些类型的插值做了统一的处理，得到了 $(0,1,\cdots,r-2,r)$，$(0,1,\cdots,r-3,r)$ 和 $(0,1,\cdots,r-3,r-1,r)$ 插值的正则性及收敛性.

一个值得注意的问题是，当 n 为偶数时，[1]－[3]，[5]和[10]中的 $(0,1,\cdots,r-2,r)$ 插值均是正则的；而当 n 为奇数时，这些插值均是奇异的；另一方面，[4]，[7]－[9]以及[10]中的 $(0,1,\cdots,r-3,r)$ 和 $(0,1,\cdots,r-3,r-1,r)$ 插值均是正则的，其正则性与 n 的奇偶性无关. 这

* 收稿日期：1998-03-11
基金项目：国家自然科学基金(10071039)、江苏省教委基金(00KJB110005)资助项目
作者简介：谢四清(1964-)，男，湖南望城县人，博士，副教授.

强烈地暗示进一步研究 n 为奇数时 X 上的 $(0,1,\cdots,r-2,r)$ 型插值问题. 为此,设 n 为奇数,并将 $\pi_n(x)$ 的零点重新排列为

$$X: x_0 = 0,\ -1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = 1. \tag{2}$$

[11]研究了其上的(0,2)插值. 本文将考虑如下的(0,1,3)插值问题:寻找 $3n-3$ 次多项式 $Q(x)$,使 $Q(x_i)(i=0,1,\cdots,n-1)$ 和 $Q'(x_i),Q'''(x_i)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 取预先给定的值.

第 2 节给出了一些预备知识;第 3 节证明了(0,1,3)插值正则性,并给出了基多项式的显示表达式;最后一节给出了基多项式的估计,并由此得到插值过程的一致收敛性.

2 预备知识

设 n 为奇数,$P_{n-1}(x)$ 表示 $n-1$ 次 Legendre 多项式,且满足条件

$$P_{n-1}(1)=1, \pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x),\ S_n(x)=\pi_n(x)/x,$$

$x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 满足(2),则有[11,12]

$$\begin{cases}(1-x^2)P''_{n-1}(x)-2xP'_{n-1}(x)+n(n-1)P_{n-1}(x)=0,\\ \pi'_n(x)=-n(n-1)P_{n-1}(x),\ \pi''_n(x)=-n(n-1)P'_{n-1}(x),\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}P'_{n-1}(1)=-P'_{n-1}(-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1),\\ \pi'_n(1)=\pi'_n(-1)=-n(n-1),\\ \pi''_n(1)=-\pi''_n(-1)=-\dfrac{1}{2}n^2(n-1)^2.\end{cases} \tag{4}$$

对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有

$$(1-x^2)^{1/4}|P_{n-1}(x)|\leqslant Cn^{-1/2}, \tag{5}$$

$$(1-x^2)^{3/4}|P'_{n-1}(x)|\leqslant Cn^{1/2}, \tag{6}$$

$$(1-x^2)^{5/4}|P''_{n-1}(x)|\leqslant Cn^{3/2}, \tag{7}$$

$$|\pi_n(x)|\leqslant Cn^{1/2}, \tag{8}$$

$$|S_n(x)|\leqslant Cn^{3/2}. \tag{9}$$

此外,对 $|x-x_i|\leqslant\frac{1}{4}(1-x_i^2)$ 和 $|x-x_i|\geqslant\frac{1}{4}(1-x_i^2)$ 分别有

$$\left|\frac{\pi_n}{x-x_i}\right|\leqslant\begin{cases}Ci^{-1/2}n^2, & 2\leqslant i\leqslant\dfrac{1}{2}(n-1),\\ C(n-i-1)^{-1/2}n^2, & \dfrac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-2,\end{cases} \tag{10}$$

$$\left|\frac{\pi_n}{x-x_i}\right|\leqslant\begin{cases}Ci^{-2}n^{5/2}, & 2\leqslant i\leqslant\dfrac{1}{2}(n-1),\\ C(n-i-1)^{-2}n^{5/2}, & \dfrac{1}{2}(n-1)<i\leqslant(n-2),\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}Cin^{-1}\leqslant(1-x_i^2)^{1/2}\leqslant Cin^{-1}, & 2\leqslant i\leqslant\dfrac{1}{2}(n-1),\\ C(n-i-1)n^{-1}\leqslant(1-x_i^2)^{1/2}\leqslant C(n-i-1)n^{-1}, & \dfrac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-2,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} |P_{n-1}(x_i)| \geqslant Ci^{-1/2}, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ |P_{n-1}(x_i)| \geqslant C(n-i-1)^{-1/2}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2, \end{cases} \tag{13}$$

$$|P_{n-1}(0)| \geqslant Cn^{-1/2}, \tag{14}$$

$$\begin{cases} |\pi_n'(x_i)| \geqslant Ci^{-1/2}n^2, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ |\pi_n'(x_i) \geqslant C(n-i-1)^{-1/2}n^2, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} |P_{n-1}''(x_i)| \geqslant Ci^{-5/2}n^4, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ |P_{n-1}''(x_i)| \geqslant C(n-i-1)^{-5/2}n^4, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2, \end{cases} \tag{16}$$

$$P_{n-1}'(1) + P_{n-1}''(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n-1}''(t)}{t}\mathrm{d}t = -2 - (n^2 - n - 2)\frac{1}{P_{n-1}(0)}. \tag{17}$$

在此处及以后,C 均表示与 n 无关的常数.

3 正则性和显示表达式

下面考虑 n 为奇数时,X 上的(0,1,3)插值的正则性和基多项式的表达式.有

定理 1 当 n 为奇数时,X 上的(0,1,3)插值是正则的.

证明 为证正则性,只要证明若 $Q(x) \in \Pi_{3n-3}$满足

$$\begin{cases} Q(x_i) = 0, & i = 0,1,\cdots,n-1, \\ Q'(x_i) = 0, Q'''(x_i) = 0, & i = 1,2,\cdots,n-1, \end{cases} \tag{18}$$

则 $Q \equiv 0$ 即可,其中 Π_n 表示次数不超过 n 的多项式集合.

由条件(18)可设 $Q(x) = \pi_n(x)S_n(x)q(x)$,其中 $q(x) \in \Pi_{n-2}$. 由 $Q'''(x_i) = 0, i = 1,2,\cdots,n-1$,(3)和(4)知

$$\begin{cases} x_j q'(x_j) - q(x_j) = 0, & 2 \leqslant j \leqslant n-2, \\ q'(1) + (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1)q(1) = 0, \\ q'(-1) - (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1)q(-1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

由(19)可设

$$xq'(x) - q(x) = (a_0 + a_1 x)\frac{P_{n-1}'(x)}{x}, \tag{20}$$

其中 a_0, a_1 是待定常数. 微分(20)一次,然后令 $x=0$ 推知 $a_1 = 0$,且由(18)—(20)知

$$q(1) = q(-1) = -a_0. \tag{21}$$

解微分方程(20)得

$$q(x) = -\frac{1}{2}a_0 W(x) + cx, \tag{22}$$

其中 c 是常数，且 $W(x)=\frac{P'_{n-1}(x)}{x}+P''_{n-1}(x)-x\int_{-1}^{x}\frac{P''_{n-1}(t)}{t}\mathrm{d}t$. 在(22)中令 $x=\pm1$，然后利用(21)，(14)和(17)即可推知 $a_0=c=0$，从而 $Q(x)\equiv0$.

如果将 x 上的(0,1,3)插值记成基多项式的形式，

$$R(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_iA_{0i}(x)+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_iA_{1i}(x)+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_iA_{3i}(x), \tag{23}$$

其中插值基多项式 $A_{mi}\in\Pi_{3n-3}$ 满足

$$\begin{cases}A_{0i}(x_j)=\delta_{ij}, & 0\leqslant i,j\leqslant n-1,\\ A_{0i}^{(k)}(x_j)=0, & k=1,3,0\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant n-1,\end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases}A_{mi}(x_j)=0, & m=1,3,1\leqslant i\leqslant n-1,0\leqslant j\leqslant n-1,\\ A_{mi}^{(k)}(x_j)=\delta_{ij}\delta_{mk}, & m,k=1,3,1\leqslant i,j\leqslant n-1.\end{cases} \tag{25}$$

则有

定理 2 对 $2\leqslant i\leqslant n-2$,

$$A_{3i}=\frac{\pi_n^2}{6\pi_n'(x_i)P''_{n-1}(x_i)}[J_i-J_0]-\frac{1}{2}a_{3i}\pi_nS_nW+c_{3i}\pi_n^2, \tag{26}$$

且

$$A_{31}=-\frac{1}{2}a_{31}\pi_nS_nW+c_{31}\pi_n^2, \tag{27}$$

$$A_{3,n-1}=-\frac{1}{2}a_{3,n-1}\pi_nS_nW+c_{3,n-1}\pi_n^2, \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases}a_{3i}=\dfrac{1}{6\pi_n'(x_i)^3I_1}[(1-x_1^2)(J_i(1)-J_i(0))-2x_i^2], & 2\leqslant i\leqslant n-2,\\ a_{31}=a_{3,n-1}=-\dfrac{1}{3n^3(n-1)^3I_1},\end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases}c_{3i}=-\dfrac{1}{2}a_{3i}I_2-\dfrac{x_i(1-x_i)}{6\pi_n'(x_i)^3}, & 2\leqslant i\leqslant n-2,\\ c_{31}=-\dfrac{1}{2}a_{31}I_2-\dfrac{1}{3n^3(n-1)^3}, & c_{3,n-1}=-\dfrac{1}{2}a_{3,n-1}I_2.\end{cases} \tag{30}$$

而 $I_1=P'_{n-1}(1)+P''_{n-1}(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P''_{n-1}(t)}{t}\mathrm{d}t-2$, $I_2=P'_{n-1}(1)+P''_{n-1}(1)-2$, $J_i(x)=\int_{-1}^{x}\frac{P'_{n-1}(t)}{t-x_i}\mathrm{d}t$, $i=0,2,\cdots,n-2$.

定理 3 对 $2\leqslant i\leqslant n-2$,

$$\begin{aligned}A_{1i}=&\frac{1}{\pi_n'(x_i)}\pi_nL_i^2+\frac{1}{\pi_n'(x_i)^2x_i}(x+2x_i)\pi_nS_nL_i+\\&\frac{1}{\pi_n'(x_i)^2x_i}\pi_n^2[J_{i1}-J_{i2}]-\frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}A_{3i}-\frac{1}{2}a_{1i}\pi_nS_nW+c_{1i}\pi_n^2,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}A_{11}=&\frac{1}{\pi_n'(-1)}\pi_nL_1^2+\frac{1}{\pi_n'(-1)}a_1A_{31}+\\&\frac{1}{\pi_n'(-1)^2}\pi_nS_n[(x-L_1'(-1)-1)L_1+L_1'(-1)xJ_{11}-xJ_{12}]-\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}a_{11}\pi_n S_n W+c_{11}\pi_n^2, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}A_{1,n-1}=&\frac{1}{\pi_n'(1)}\pi_n L_{n-1}^2+\frac{1}{\pi_n'(1)}a_{n-1}A_{3,n-1}+\\&\frac{1}{\pi_n'(1)^2}\pi_n S_n[(x-L_{n-1}'(1)+1)L_{n-1}+L_{n-1}'(1)xJ_{n-1,1}-xJ_{n-1,2}]-\\&\frac{1}{2}a_{1,n-1}\pi_n S_n W+c_{1,n-1}\pi_n^2,\end{aligned} \tag{33}$$

其中

$$\begin{cases}a_{1i}=\dfrac{1}{x_i\pi_n'(x_i)^2 I_1}[J_{i1}(1)-J_{i2}(1)], \quad 2\leqslant i\leqslant n-2,\\ a_{1i}=\dfrac{1}{\pi_n'(x_i)I_1}[L_i'(x_i)J_{i1}(1)-J_{i2}(1)-L_i'(x_i)+2x_i], \quad i=1,n-1,\end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases}c_{1i}=-\dfrac{1}{2}a_{1i}I_2, \quad 2\leqslant i\leqslant n-1,\\ c_{11}=-\dfrac{1}{2}a_{11}I_2-\dfrac{1}{\pi_n'(-1)^2}[L_1'(-1)+2],\end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases}a_1=-[\pi_n''(-1)+6\pi_n''(-1)L_1'(-1)-\pi_n'(-1)L_1'(-1)+\pi_n'(-1)]\\ a_{n-1}=-[\pi_n''(1)+6\pi_n''(1)L_{n-1}'(1)+6\pi_n'(1)L_{n-1}'(1)+6\pi_n'(1)]\end{cases} \tag{36}$$

$$L_i=\frac{x_i}{\pi_n'(x_i)}\frac{\pi_n(x)}{x(x-x_i)}, \quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

定理 4 对 $2\leqslant i\leqslant n-2$,

$$A_{0i}=l_i^3-\frac{\pi_n^2}{\pi_n'(x_i)^2}J_{i3}-\frac{1}{2}a_{0i}\pi_n S_n W+c_{0i}\pi_n^2, \tag{37}$$

$$\begin{cases}A_{0i}=l_i^3+b_{1i}A_{1i}+b_{3i}A_{3i}-\dfrac{\pi_n^2}{\pi_n'(x_i)^3}J_{i3}-\dfrac{1}{2}a_{0i}\pi_n S_n W+c_{0i}\pi_n^2, \quad i=1,n-1,\\ A_{00}=l_0^3+\dfrac{\pi_n S_n}{\pi_n'(0)^3}[S_n'+\dfrac{1}{3}n(n-1)P_{n-1}'-J_{03}-\dfrac{1}{2}a_{00}W+c_{00}x],\end{cases} \tag{38}$$

其中

$$\begin{cases}a_{0i}=-\dfrac{1}{\pi_n'(x_i)^2 I_1}J_{i3}(1), \quad 1\leqslant i\leqslant n-2,\\ a_{00}=\dfrac{1}{I_1}[2S_n'(1)-J_{03}(1)],\end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases}c_{0i}=-\dfrac{1}{2}a_{0i}I_2, \quad 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ c_{00}=-\dfrac{1}{2}a_{00}I_2+S_n'(1)+\dfrac{2}{3}P_{n-1}'(1)-\dfrac{n(n-1)}{3}P_{n-1}'(1),\end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases}b_{1i}=3l_i'(x_i),\\ b_{3i}=3l_i'(x_i)-27l_i''(x_i)l_i'(x_i)+3l_i''(x_i),\end{cases} \quad i=1,n-1 \tag{41}$$

$$J_{i3}=\int_{-1}^{x}\frac{l_i'(t)-(u_i+v_i t)l_i(t)}{(t-x_i)^2}\mathrm{d}t, \quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \tag{42}$$

$$J_{03}=\int_{-1}^{x}\frac{S_n''(t)+\frac{1}{3}n(n-1)P_{n-1}''(t)}{t}\mathrm{d}t. \tag{43}$$

而

$$\begin{cases} u_i = -x_i l_i''(x_i),\ v_i = l_i''(x_i), & 2 \leqslant i \leqslant n-2, \\ u_i = x_i[l_i'(x_i)^2 - l_i''(x_i)] + l_i'(x_i), & i = 1, n-1 \\ v_i = l_i''(x_i) - l_i'(x_i)^2, & i = 1, n-1. \end{cases}$$

容易验证定理 2—4 中的 A_{mi}满足条件(24)—(25). 在此省略详细的推导过程.

4 基多项式的估计和收敛性

设 $f(x) \in C[-1,+1]$. 在这一节中将考虑如下的插值多项式序列

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) A_{0i}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} A_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in} A_{3i}(x). \tag{44}$$

为了证明插值序列(44)在一定条件下一致收敛于 $f(x)$,需要对基多项式进行估计. 为此先给出几个引理.

引理 1[11] 设 n 为奇数, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 则

$$|J_i(x)| \leqslant \begin{cases} C i^{-3/2} n^2, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^{-3/2} n^2, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2, \end{cases} \tag{45}$$

$$|J_0(x)| \leqslant C n^{1/2}, \tag{46}$$

$$J_i(1) = \frac{2}{1-x_i^2} - \frac{2}{1-x_i^2} \frac{1}{P_{n-1}'(x_i)}, \quad i = 0, 2, \cdots, n-2. \tag{47}$$

引理 2[11] 设 $F(x) = \dfrac{P_{n-1}'(x)}{x} + P_{n-1}''(x) - x \displaystyle\int_0^x \frac{P_{n-1}''(t)}{t} \mathrm{d}t$, 且 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 则

$$|S_n(x) F(x)| \leqslant C n^3. \tag{48}$$

引理 3 对 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 有

$$|A_{3i}(x)| \leqslant \begin{cases} C i^2 n^{-5}, & 1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^2 n^{-5}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-1, \end{cases} \tag{49}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_{3i}| \leqslant C n^{-2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{50}$$

证明 显然, (50)是(49)的一个直接推论, 所以只要证明(49)即可. 先设 $2 \leqslant i \leqslant n-2$, 则从(6), (15)—(16)和(45)—(46)知

$$\left| \frac{\pi_n^2}{6 \pi_n'(x_i)^2 P_{n-1}''(x_i)} [J_i - J_0] \right| \leqslant \begin{cases} C i^2 n^{-5}, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^2 n^{-5}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2, \end{cases} \tag{51}$$

由(4), (12)—(17)和(47)知

$$|a_{3i}| \leqslant \begin{cases} Ci^2 n^{-17/2}, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^2 n^{-17/2}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2. \end{cases} \tag{52}$$

又由(29),(30)知

$$-\frac{1}{2}a_{3i}W + c_{3i}x = -\frac{1}{2}a_{3i}F(x) - \frac{1}{2}a_{3i}I_1 x - \frac{x_i(1-x_i)x}{6\pi_n'(x_i)^3}. \tag{53}$$

由(8),(15),(48),(52)—(53)知

$$\left| -\frac{1}{2}a_{3i}\pi_n S_n W + c_{3i}\pi_n^2 \right| \leqslant \begin{cases} Ci^2 n^{-5}, & 2 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^2 n^{-5}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-2. \end{cases} \tag{54}$$

将(51)和(54)代人(26)即得(49). 由(27),(29)和(30)有 $A_{31} = -\frac{1}{2}a_{31}\pi_n S_n F - \frac{1}{2}a_{31}I_1\pi_n^2 - \frac{1}{3n^3(n-1)^3}\pi_n^2$. 由(18),(29)和(48)即知(49)对 $i=1$ 也成立. 对 $i=n-1$ 可类似地证明.

用相同的方法可得到下面两个引理

引理 4 对 $-1 \leqslant i \leqslant 1$,有

$$|A_{1i}(x)| \leqslant \begin{cases} Ci^{-1/2}n^{-1/2}, & 1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C(n-i-1)^{-1/2}n^{-1/2}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-1, \end{cases} \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_{1i}(x)| \leqslant C, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{56}$$

引理 5 对于 A_{0i},如下结论成立:

若 $|x-x_i| \leqslant \frac{1}{4}(1-x_i^2)$,有

$$|A_{0i}(x)| \leqslant \begin{cases} C + Ci^{-3}n^2, & 1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C + C(n-i-1)^{-3}n^2, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-1, \end{cases} \tag{57}$$

若 $|x-x_i| \geqslant \frac{1}{4}(1-x_i^2)$,有

$$|A_{0i}(x)| \leqslant \begin{cases} C + Ci^{-3/2}n^{3/2}, & 1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}(n-1), \\ C + C(n-i-1)^{-3/2}n^{3/2}, & \frac{1}{2}(n-1) < i \leqslant n-1, \end{cases} \tag{58}$$

且

$$|A_{00}(x)| \leqslant Cn, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_{0i}| \leqslant Cn, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{60}$$

由(50),(56)和(60)容易证明如下的收敛定理

定理 5 设 $f \in C[-1,1]$ 满足 Zygmund 条件 $|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = o(h)$

，则当$|\alpha_{in}|=o(1)$，$|\beta_{in}|=o(n^2)$时，满足(44)的插值多项式序列$R_n(x)$在$[-1,1]$上一致收敛到$f(x)$.

参考文献：

[1] BÁLAZ J, TURÁN P. *Notes on Interpolation.* Ⅰ: *Explicit Formulae*; Ⅱ: *Convergence*; Ⅳ: *Inequalities* [J]. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1957, **8**, 1958, **9**.

[2] VARMA A K. *On some open problems of P. Turan concerning Birkhoff interpolation* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, **274**: 797—808.

[3] VÉRTESI P. *Notes on the convergence of* (0,2) *and* (0,1,3) *interpolation* [J]. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 1971, **22**: 127—138.

[4] 史应光. Turan 问题 37—39 的完全解 [J]. 中国科学 A 辑, 1993, **23**(5): 461—470.
SHI Ying-guang. *Complete solutions to problem* 37—39 *of P. Turan* [J]. Science in China (A Series), 1993, **23**(5): 461—470 (in Chinese).

[5] SÁXENA R B, SHARMA A. *On some interpolation properties of Legendre polynomials* [J]. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 1958, **9**: 345—358.

[6] SÁXENA R B. *On Some Interpolation Properties of Legendre Polynomials* Ⅰ [D]. Ph. D. thesis, Chap. 2, Lucknow University, 1960.

[7] AKHLAGHI M R, CHAK A M, SHARMA A. (0,3) *interpolation on the zeros of* $\pi_n(x)$ [J]. Rocky Mountain J. Math., 1989, **19**: 9—21.

[8] SZABADOS J, VARMA A K. *On convergence* (0,3) *interpolation process* [J]. Rocky Mountain J. Math., 1994, **24**: 729—757.

[9] AKHLAGHI M R, CHAK A M, SHARMA A. (0,2,3) *interpolation on the zeros of* $\pi_n(x)$ [J]. Approx. Theory Appl., 1988, **4**: 55—74.

[10] SHARMA A, SZABADOS J, UNDERHILL B, et al. *On some general lacunary interpolation problems* [J]. J. Approx. Theory, 1996, **87**: 194—219.

[11] XIE Si-qing. *On a problem of* (0,2) *interpolation* [J]. Approx. Theory, Appl., 1993, **9**(3): 73—88.

[12] LORENTZ G G, JETTER K, RIEMENSCHNEIDER S D. *Birkhoff Interpolation* [M]. Addison-Wesley Press, 1983.

(0,1,3) Interpolation on the Zeros of $\pi_n(x)$

XIE Si-qing

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, China)

Abstract: In this paper we consider the regularity and convergence of (0,1,3) interpolation on the zeros of $\pi_n(x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)$, where n is odd and P_{n-1} denotes $(n-1)$-th Legendre Polynomials.

Key words: interpolation; regularity; convergence.