第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

一类广义有理算子的饱和定理*

章 仁 江
(中国计量学院数学教研室，浙江 杭州 310034)

摘　要：本文给出了广义有理算子

$$\Lambda_{n,s}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s\Big/\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s,\quad (s>0).$$

当 $1<s\leqslant 2$ 时的饱和类.

关键词：广义有理算子；饱和类.
分类号：AMS(1991) 41A/CLC O174.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0295-07

1 引 言

设 $f(x)\in C_{2\pi}, x_k=\frac{2k\pi}{n}(k=0,\pm 1,\cdots)$ 考虑如下定义的广义有理算子

$$\Lambda_{n,s}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s\Big/\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s,\quad (s>0).\tag{1}$$

文献[1]研究了 $\Lambda_{n,s}(f,x)$ 的逼近性质，证明了当 $s=4$ 时

$$|\Lambda_{n,4}(f,x)-f(x)|\leqslant 2\omega\left(f,\frac{\sqrt{3}\pi}{n}\right),$$

这里 $\omega(f,t)$ 是 $f(x)$ 的连续模. 文献[2]进一步证明了 $s>2$ 的一些逼近性质. 最近文献[4]证明了如下的

定理 A 若 $1<s\leqslant 2$，那么

(1) $\|\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\|=o(n^{1-s})\Leftrightarrow f(x)=\text{const}$，

(2) $\|\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\|=O(n^{1-\lambda})\Leftrightarrow f(x)\in\text{Lip}\lambda$，

这里 $0<\lambda<s-1$. 由于定理 A 的结论(2)仅对于阶是 $n^{1-\lambda}$ 成立，并不是对 n^{1-s} 成立，猜想这个结论可以改进. 最近，周信龙教授写了文[5]，运用他的方法，可以获得以下满意的结果. 为了

* 收稿日期：1998-02-27
作者简介：章仁江(1967-)，男，中国计量学院讲师，浙江大学在职博士.
E-mail：renjiang@mail.hz.zj.cn

叙述结果，引入[5]中记号

$$T_{(\varepsilon,s)}f(x)=\int_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\varepsilon\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^{s}}\mathrm{d}t,\quad\forall\, x\in[0,2\pi].\tag{2}$$

有

定理 设 $f(x)\in C_{2\pi}$，对于 $1<s\leqslant 2$ 有

$$\|\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\|=O(n^{1-s})\Leftrightarrow f(x)\in\mathrm{Lip}(s-1)\text{且}\sup_{\varepsilon>0}\|T_{\varepsilon}f\|<\infty,$$

这里 $\|\cdot\|$ 为 $C_{2\pi}$上的范数.

由此定理及定理 A 中(1)，得到了此算子 $\Lambda_{n,s}(f,x)(1<s\leqslant 2)$ 的饱和类是 $S_s=\{f|f\in\mathrm{Lip}(s-1),\ \sup\limits_{\varepsilon>0}\|T_{\varepsilon}f\|<\infty\}$，饱和阶是 $o(n^{1-s})$，这与 Shepard 算子具有类似的性质.

2 一些引理

为了使证明简便一些，以下约定"$x\sim y$"表示存在两个正的常数 k_1,k_2 使得 $k_1x\leqslant y\leqslant k_2x$，文中常数 C_x 都表示绝对常数，在不同之处可有不同的值. 首先，须指出算子 $\Lambda_{n,s}(f,x)$ 可简化为

$$\Lambda_{n,s}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)|\sin\frac{1}{2}(x-x_k)|^{-s}\Big/\sum_{k=0}^{n-1}|\sin\frac{1}{2}(x-x_k)|^{-s}.\tag{3}$$

对于 $x\in[0,2\pi]$，记 $U=\dfrac{x}{2\pi}$，$\delta=nU-j$，$j\in N$，限制 $\delta\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，则容易明白 δ,j 是由 nU 唯一确定的，定义函数

$$\eta(\delta,s)\ :=(|\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{1}{2}(x-x_k)|^{-s})^{-1}.\tag{4}$$

有(以下仅考虑 $1<s\leqslant 2$)

引理 1

$$\eta(\delta,s)\sim(\frac{\delta}{n})^{s}.\tag{5}$$

引理 2 对于 $|\delta_1|<\dfrac{1}{2}$，$|\delta_2|<\dfrac{1}{2}$有

$$|\eta(\delta_1,s)-\eta(\delta_2,s)|\leqslant\frac{C}{n^{s}}|\delta_1|^{s-1}|\delta_2|^{s-1}|\delta_1-\delta_2|\max\{|\delta_1|,|\delta_2|\}.\tag{6}$$

引理 1，引理 2 直接计算可得，此处略去证明.

引理 3 若 $f\in C_{2\pi}$则

$$\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)=c\cdot n\cdot\eta(\delta,s)\int_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^{s}}\mathrm{d}t+O(\omega(f,\frac{1}{n})).$$

(这里"O"是不依赖于 f,n 和 s)

证明 对于 $k\neq j-1,j,j+1$ 有

$$||\sin\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{n}-x)|^{-s}-|\sin\frac{1}{2}(\frac{2(k+\xi)\pi}{n}-x)|^{-s}|\leqslant\frac{C}{n}|\sin\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{n}-x)|^{-s-1},(0\leqslant\xi\leqslant 1),$$

以及

$$\eta(\delta,s)\sum_{k=0,k\neq j-1,j,j+1}^{n-1}(f(\frac{2(k+\xi)\pi}{n})-f(x))|\sin\frac{1}{2}(\frac{2(k+\xi)\pi}{n}-x)|^{-s-1}\leqslant C\cdot\omega(f,\frac{1}{n}).$$

由 $\Lambda_{n,s}(f,x)$ 的表达式(2)，应用以上两式及中值定理，容易得到

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\\
&=\eta(\delta,s)\sum_{k=0,k\neq j-1,j,j+1}^{n-1}(f(\frac{2k\pi}{n})-f(x))|\sin\frac{1}{2}(\frac{2k\pi}{n}-x)|^{-s}+O(\omega(f,\frac{1}{n}))\\
&=\eta(\delta,s)\sum_{k=0,k\neq j-1,j,j+1}^{n-1}(f(\frac{2(k+\xi)\pi}{n})-f(x))|\sin\frac{1}{2}(\frac{2(k+\xi)\pi}{n}-x)|^{-s}+\\
&\quad O(\omega(f,\frac{1}{n}))\\
&=\eta(\delta,s)\int_0^1\sum_{k=0,k\neq j-1,j,j+1}^{n-1}(f(\frac{2(k+t)\pi}{n})-f(x))|\sin\frac{1}{2}(\frac{2(k+t)\pi}{n}-x)|^{-s}\mathrm{d}t+\\
&\quad O(\omega(f,\frac{1}{n}))\\
&=n\cdot\eta(\delta,s)\sum_{k=0,k\neq j-1,j,j+1}^{n-1}\int_{2\pi\frac{k}{n}}^{2\pi\frac{k+1}{n}}+O(\omega(f,\frac{1}{n}))\\
&=C\cdot n\cdot\eta(\delta,s)\int_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^s}\mathrm{d}t+O(\omega(f,\frac{1}{n})),(0\leqslant\xi\leqslant 1).
\end{aligned}$$

引入记号 $F_{n,s}(\delta)=\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)$，有

引理 4 对于 $|\delta_1|<\frac{1}{2}$，$|\delta_2|<\frac{1}{2}$ 有

$$\begin{aligned}
&\eta(\delta_2,s)F_{n,s}(\delta_1)-\eta(\delta_1,s)F_{n,s}(\delta_2)=\eta(\delta_2,s)\Delta_{\frac{2\pi\delta_1}{n}}f(\frac{2j\pi}{n})-\eta(\delta_1,s)\Delta_{\frac{2\pi\delta_2}{n}}f(\frac{2j\pi}{n})+\\
&\quad\eta(\delta_1,s)\eta(\delta_2,s)\sum_{k\neq j}(f(\frac{2k\pi}{n})-f(\frac{2j\pi}{n}))\times\\
&\quad[|\sin\frac{2(k-j-\delta_1)\pi}{n}|^{-s}-|\sin\frac{2(k-j-\delta_2)\pi}{n}|^{-s}].
\end{aligned}\tag{7}$$

这里 $\Delta_h f(t)=f(t)-f(t+h)$ 本引理的证明是容易的，此处略去.

引理 5 对于 $f\in C_{2\pi}$，若 $\|\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\|=O(\frac{1}{n^{s-1}})$，则 $f\in\mathrm{Lip}(s-1)$.

证明 令 $\Phi_s(n):=\sup\limits_{l\geqslant n}\|\Lambda_{l,s}(f,x)-f(x)\|l^{s-1}$. 由引理的假设知道存在 $M>m>0$，使得 $m\leqslant\Phi_s(n)\leqslant M$ 对任意 n 成立，令 $\Phi_s(x)$ 在 $[n-1,n]$ 上是线性的，在 $x=n(\geqslant 1)$ 上为 $\Phi_s(n)$，$x=0$ 时为 $\Phi_s(1)$，则 $\Phi_s(x)$ 是单调减少的连续函数，且

$$m\leqslant\Phi_s(x)\leqslant M,\ (x>0).\tag{8}$$

再定义

$$\psi_s(x)\ :=\Phi_s(\frac{1}{x})x^{s-1}.\tag{9}$$

显然引理中的假设蕴含

$$\|\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)\|=O(\psi_s(\frac{1}{n})).\tag{10}$$

以下将显示(10)式蕴含 $\omega(f,t)=O(\psi_s(t))$ 定义

$$D(x,y,s)\ :=\frac{|f(x)-f(y)|}{\psi_s(|x-y|)},\ 0<|x-y|<2\pi. \tag{11}$$

显然 $\omega(f,t)=O(\psi_s(t))$ 当且仅当 $\sup\limits_{0<|x-y|<2\pi}D(x,y,s)<\infty$，因此要证明引理只要证明 $\sup\limits_{0<|x-y|<2\pi}D(x,y,s)<\infty$. 为此，假设相反

$$\sup_{0<|x-y|<2\pi}D(x,y,s)<\infty, \tag{12}$$

则有

$$D_k\ :=\sup_{|x-y|>\frac{2\pi}{k}}D(x,y,s)\to\infty,(k\to\infty). \tag{13}$$

显然存在 $x_k,y_k\in[0,2\pi]$ 满足

$$D_k=D(x_k,y_k,s),\ |x_k-y_k|\geqslant\frac{2\pi}{k}. \tag{14}$$

进一步可假设 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-y_k|=0$，否则将有 $\sup\limits_{0<|x-y|<2\pi}D(x,y,s)<\infty$，这与(12)式的假设矛盾. 现在令

$$U_k=\frac{x_k}{2\pi},\ V_k=\frac{y_k}{2\pi}. \tag{15}$$

则 $0\leqslant U_k,\ V_k\leqslant 1$，记

$$\alpha_k\ :=\frac{U_k+V_k}{2},\ \xi_k\ :=\frac{U_k-V_k}{2}. \tag{16}$$

则

$$U_k=\alpha_k+\xi_k,\ V_k=\alpha_k-\xi_k. \tag{17}$$

同文献(4)或(5)等一样，我们可以找到有理数 $\frac{l_k}{m_k}$ 满足

$$|\alpha_k-\frac{l_k}{m_k}|\leqslant\frac{|\xi|}{\rho m_k},\ 0\leqslant l_k\leqslant m_k\leqslant\frac{\rho}{|\xi_k|}. \tag{18}$$

此处 $\rho>0$ 是一个待定的很小的数，后面将要确定它. 存在整数 n_k，它是 m_k 的倍数，满足

$$\frac{\rho}{2n_k}<|\xi_k|<\frac{\rho}{n_k}. \tag{19}$$

以下分两种情形：

情形 1　$m_k\to\infty(k\to\infty)$（或者其子列）对于 $a_k=\xi_k n_k$ 和 $\frac{h_k}{n_k}=\frac{l_k}{m_k}$，有

$$\begin{aligned}U_k&=a_k+\frac{a_k}{n_k}=\frac{h_k}{n_k}+\frac{n_k a_k-h_k+a_k}{n_k}\ :=\frac{h_k}{n_k}+\frac{\overline{a_k}}{n_k},\\ V_k&=a_k-\frac{a_k}{n_k}=\frac{h_k}{n_k}+\frac{n_k a_k-h_k-a_k}{n_k}\ :=\frac{h_k}{n_k}+\frac{\overline{\beta_k}}{n_k}.\end{aligned} \tag{20}$$

显然，对于很小的 ρ 和大的 k 成立 $|\overline{\alpha_k}|<1/2$，$|\overline{\beta_k}|<1/2$ 选择 $n=n_k,j=h_k,\delta_1=\overline{\alpha_k},\delta_2=\overline{\beta_k}$. 由 $\eta(\delta,s)$ 的定义及其估计式，并注意到 $|n_k a_k-h_k|\leqslant\frac{1}{m_k}$，当 $k>k_0$ 时，有

$$|\delta_1|\sim|\delta_2|\sim\rho, \tag{21}$$

$$\eta(\delta_1,s)\sim\eta(\delta_2,s)\sim\frac{\rho^s}{n_k^s}. \tag{22}$$

由引理 2 或(6)式有

$$|\eta(\delta_1,s)-\eta(\delta_2,s)|\leqslant C\frac{\rho^{2s}}{n_k^s}. \tag{23}$$

由引理 4 有

$$\begin{aligned}&|\eta(\delta_2,s)Fn_{k,s}(\delta_1)-\eta(\delta_1,s)Fn_{k,s}(\delta_2)|\\ &\geqslant C_1\frac{\rho_s}{n_k^s}|f(2\pi\frac{h_k+\overline{\alpha}_k}{n_k})-f(2\pi\frac{h_k+\overline{\beta}_k}{n_k})|-C_2\frac{\rho^{2s}}{n_k^s}|f(2\pi\frac{h_k+\overline{\alpha}_k}{n_k})-f(2\pi\frac{h_k}{n_k})|-\\ &\quad C_3\frac{\rho^{2s}}{n_k^{2s}}\sum_{i\neq h_k}|f(\frac{2i\pi}{n_k})-f(\frac{2h_k\pi}{n_k})|\cdot||\sin\frac{2(i-h_k-\delta_1)\pi}{n_k}|^{-s}-|\sin\frac{2(i-h_k-\delta_2)\pi}{n_k}|^{-s}|.\end{aligned} \tag{24}$$

由(13)有

$$|f(\frac{2i\pi}{n_k})-f(\frac{2h_k\pi}{n_k})|\ /\ \psi_s(|\frac{2i\pi}{n_k}-\frac{2h_k\pi}{n_k}|)\leqslant D_k.$$

由(8),(9)有($i\neq h_k$)

$$|f(\frac{2i\pi}{n_k})-f(\frac{2h_k\pi}{n_k})|\leqslant\frac{M}{m}|i-h_k|^{s-1}\psi_s(\frac{2\pi}{n_k})D_k. \tag{25}$$

类似地有

$$|f(2\pi\frac{h_k+\overline{\alpha}_k}{n_k})-f(\frac{2h_k\pi}{n_k})|\leqslant C\psi_s(\frac{2\pi}{n_k})D_k. \tag{26}$$

另一方面,由(15),(20),(18)得 $|x_k-y_k|>\frac{2\pi\rho}{n_k}$,从而有

$$\begin{aligned}&|f(2\pi\frac{h_k+\overline{\alpha}_k}{n_k})-f(2\pi\frac{h_k+\overline{\beta}_k}{n_k})|=|f(x_k)-f(y_k)|=D_k\psi_s(|x_k-y_k|)\\ &\geqslant\frac{m}{M}(n_k|u_k-v_k|)^{s-1}\psi_s(\frac{2\pi}{n_k})D_k\geqslant\frac{m}{M}\rho^{s-1}\psi_s(\frac{2\pi}{n-k})D_k.\end{aligned} \tag{27}$$

再利用($i\neq h_k$)

$$||\sin\frac{2(i-h_k-\delta_1)\pi}{n_k}|^{-s}-|\sin\frac{2(i-h_k-\delta_2)}{n_k}|^{-s}|\leqslant C\frac{|\delta_1-\delta_2|}{n_k}|\frac{i-h_k}{n_k}|^{-s-1} \tag{28}$$

利用以上的(25),(26),(27),(28)联合(24)有

$$\begin{aligned}&|\eta(\delta_2,s)F_{nk,s}(\delta_1)-\eta(\delta_1,s)F_{nk,s}(\delta_2)|\geqslant[C_1\frac{\rho_s}{n_k^s}\frac{m}{M}\rho^{s-1}-C_2\frac{\rho^{2s}}{n_k^s}-C_3\frac{\rho^{2s+1}}{n_k^s}]\psi_s(\frac{2\pi}{n_k})D_k\\ &\geqslant(C_1-C_2\rho-C_3\rho)\psi_s(\frac{1}{n_k})D_k\frac{1}{n_k^s}\rho^{2s-1}\end{aligned}$$

令一方面,

$$|\eta(\delta_2,s)Fn_{k,s}(\delta_1)-\eta(\delta_1,s)Fn_{k,s}(\delta_2)|\leqslant C\frac{\rho_s}{n_k^s}\|\Lambda_{n,s}(f,s)-f(x)\|\leqslant C\frac{\rho^s}{n_k^s}\psi_s(\frac{1}{n_k})$$

选取 $\rho=\min\{\frac{C_1}{2(C_2+C_3)},\frac{1}{3}\}$ 可得 $D_k\leqslant\frac{2C}{C_1}\rho^{1-s}$,这与(13)式 $D_k\to\infty(k\to\infty)$ 是个矛盾.

情形 2 $m_k\leqslant C$(C 是某个常数)对所有 k 成立,如有可能取 m_k 的子列. 可假定

$$\lim_{k\to\infty}U_k=\lim_{k\to\infty}V_k:=z\in[0,1] \tag{29}$$

那么条件 $m_k\leqslant C$ 蕴含 z 是一个有理数,以下可参看文[4]类似的证明. □

3 定理的证明

前面已经指出 δ 限制在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 内，δ 和 j 是唯一地被 $\frac{nx}{2\pi}$ 所确定．这样可以认为 δ 是 $\frac{nx}{2\pi}$ 的函数，显然能写 $|\delta|$ 为 $|\delta|:=B(\frac{nx}{2\pi})$，这里 $B(\cdot)$ 如下给出

$$B(y)=\begin{cases} y, & 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}, \\ 1-y, & \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$$

和 $B(y+1)=B(y)$.

(1) 若 $f\in Lip(s-1)$ 及 $\sup\limits_{\varepsilon>0}\|T_\varepsilon f\|<\infty$，由引理 3 和引理 1 立即知道 $\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)=O(n^{1-s})$.

(2) 若 $\Lambda_{n,s}(f,x)-f(x)=O(n^{1-s})$，则由引理 5 即知 $f\in \mathrm{Lip}(s-1)$，再由引理 3 可知，对任意 x 有

$$n\cdot\eta(\delta,s)\int\limits_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^s}\mathrm{d}t=O(n^{1-s}).$$

从而有

$$B(\frac{nx}{2\pi})\int\limits_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^s}\mathrm{d}t=O(1).$$

取 x_0 使 $B(\frac{nx_0}{2\pi})=\frac{1}{2}$，于是有

$$\int\limits_{\{t\in[0,2\pi],|t-x_0|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x_0|^s}\mathrm{d}t=O(1).$$

另一方面，对任何 $x\in[0,2\pi]$，存在 x_0 使得 $B(\frac{nx_0}{2\pi})=\frac{1}{2}$ 且 $|x_0-x|\leqslant\frac{2\pi}{2n}$，这样，有

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\{t\in[0,2\pi],|t-x|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x)}{|t-x|^s}\mathrm{d}t\\ &<C\cdot\Big|\int\limits_{\{t\in[0,2\pi],|t-x_0|\geqslant\frac{2\pi}{n}\}}\frac{f(t)-f(x_0)}{|t-x_0|^s}\mathrm{d}t\Big|+C\cdot n^{s-1}\omega(f,\frac{1}{n})\\ &=C\cdot O(1)+C=O(1).\end{aligned}$$

即 $\sup\limits_{\varepsilon}\|T_\varepsilon f\|<\infty$， □

参考文献：

[1] VARMA A K. *An interpolatory rational trigonometric approximation* [J]. SIAM J Numer Anal., 1981, **18**: 897－899.

[2] SUN Xie-hua. *On approximation theorems of generalized rational operations and their saturation* [J]. Chinese Annals of Math., 1984, **5**(6): 781—787. (in Chinese)

[3] SOMORJAI G. *On a sturation problem* [J]. Acta. Math. Hungar, 1978, **32**: 377—381.

[4] ZHANG Ren-jiang. *Approximation of a kind of generalized reational operator* [J]. Journal of Hangzhou University, 1996, **23**(4): 313—321. (in Chinese)

[5] ZHOU X L. *The saturation class of shepard operators* [J]. Acta. Math. Hungar, 1998, **80**: 293—310.

[6] SZABADOS J. *Direct and converse approximation theorems for the shepard operator* [J]. J. Approx. Th. and Its Appl., 1991, **7**: 63—76.

[7] XIA Ting-fan, ZHANG Ren-jiang and ZHOU Song-ping. *Three conjectures on shepard interpolatory operators* [J]. J. A. T., 1998, **93**(3): 399—414.

Saturation Class of A Kind of Generalized Rational Operator

ZHANG Ren—jiang

(China Institute of Meterology, Hangzhou 310034, China)

Abstract: The generalized rational operator $\Lambda_{n,s}(f,x)$ is given by

$$\Lambda_{n,s}(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s\Big/\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\sin\frac{n}{2}(x-x_k)}{n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|^s\quad(s>0)$$

This paper gets its saturation class when $1<s\leqslant 2$.

Key words: generalized rational operator; saturation class.