第21卷第2期
2001年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 2
May 2001

线有向图的幂敛指数*

周　波
(华南师范大学数学系，广东 广州 510631)

摘　要：采用有向图的矩阵表示，得到了线有向图的幂敛指数和周期的有关结果.

关键词：线有向图；幂敛指数；布尔矩阵.
分类号：AMS(1991) 05C20,05C50,15A33/CLC O157.5
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0302-03

1　引　言

设$G=(V,A)$是一个有向图，允许有环但不允许有重复弧，这里$V=V(G)$，$A=A(G)$分别是G的顶点集和弧集，G的线有向图LG定义如下(参见[1])：LG的顶点集就是G的弧集，而(a,b)是LG的弧当且仅当在G中存在顶点u,v,w使$a=(u,v)$且$b=(v,w)$. 由线有向图的定义，LG中存在从$x=(u_1,u_2)$到$y=(v_1,v_2)$长为k的途径当且仅当G中存在从u_2到v_1长为$k-1$的途径.

有向图G的周期$p(G)$和幂敛指数$k(G)$分别是这样最小的正整数p和最小的非负整数k：对G的任意两顶点u,v，G中存在从u到v长为k的途径当且仅当存在从u到v长为$k+p$的途径.

对有向图G，若G是强连通的，且$p(G)=1$，则称G为本原的. 此时G的幂敛指数亦称为本原指数，记作$\gamma(G)$.

文[3]讨论了有向图G与其线有向图LG的周期及幂敛指数的关系，得到$p(LG)=p(G)$，$k(G)-1\leqslant k(LG)\leqslant k(G)+1$，当$G$无孤立点时，$G$是本原的当且仅当$LG$是本原的，当$G$为本原且阶大于1时，$\gamma(LG)=\gamma(G)+1$. 本文采用有向图的矩阵表示，直接地得到比上述结论更广泛和更强的结果.

2　有向图的矩阵表示

众所周知，一个有向图$G=(V,A)$，$V=\{1,2,\cdots,n\}$，可以自然地用它的邻接矩阵$B(G)$

* 收稿日期：1998-03-23；修订日期：1999-11-15
基金项目：广东省自然科学基金(990447)和国家自然科学基金资助项目(10071025)
作者简介：周　波(1967-)，男，华南师范大学副教授.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$=(b_{ij})$(视作布尔矩阵)来表示:$b_{ij}=1$ 当且仅当(i,j)是 G 的弧.

对一个 $n\times n$ 布尔矩阵 B,必存在一个 n 阶标号有向图 G,使 $B=B(G)$.此时记 $p(B)=p(G)$,$k(B)=k(G)$.显见,$p(B)$ 和 $k(B)$ 分别是使得 $B^k=B^{k+p}$ 成立的最小正整数 p 和最小非负整数 k.若存在一个正整数 k 使 B^k 是一个全 1 矩阵,则称 B 是本原的.显见,有向图 G 是本原的当且仅当 $B(G)$ 是本原的.

对有向图 $G=(V,A)$,$V=\{1,2,\cdots,n\}$,$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,G 的出关联矩阵是一个 $n\times m$ 的布尔矩阵 $B_O=(b_{ij}^O)$,$b_{ij}^O=1$ 当且仅当 x_j 是点 i 的出弧;G 的入关联矩阵是一个 $m\times n$ 的布尔矩阵 $B_I=(b_{ij}^I)$,$b_{ij}^I=1$ 当且仅当 x_i 是点 j 的入弧.显见([2]),$B(G)=B_OB_I$,$B(LG)=B_IB_O$.

3 线有向图的周期和幂敛指数

定理 1 设 G 是一个有向图,则 $p(LG)=p(G)$,$k(G)-1\leqslant k(LG)\leqslant k(G)+1$.

定理 1 即为文[3]的定理 1 和定理 2.注意到 $p(LG)=P(B_IB_O)$,$k(LG)=k(B_IB_O)$,$p(G)=p(B_OB_I)$,$k(G)=(B_OB_I)$,我们可以得到一个比定理 1 更强的结论,其证明几乎是显然的.

定理 2 设 X 是一个 $n\times m$ 布尔矩阵,Y 是一个 $m\times n$ 布尔矩阵,则 $p(XY)=p(YX)$,$k(YX)-1\leqslant k(XY)\leqslant k(YX)+1$

证明 设 $p(YX)=p$,$k(YX)=k$,则 $(YX)^{k+p}=(YX)^k$.于是 $(XY)^{(k+1)+p}=X(YX)^{k+p}Y=X(YX)^kY=(XY)^{k+1}$.由幂敛指数和周期的定义,$p(XY)\leqslant p=p(YX)$,$k(XY)\leqslant k+1=k(YX)+1$.同理可证 $p(YX)\leqslant p(XY)$,$k(YX)\leqslant k(XY)+1$.定理得证.

文[3]的定理 4 断言:若有向图 G 无孤立点,则 G 是本原的当且仅当 LG 是本原的.显见,G 无孤立点等价于 B_O 无零行,B_I 无零列.注意到 B_O 的各列,B_I 的各行恰有一个 1.从矩阵的观点看,我们有一个更强的结论(参见[4]之定理 3.5.4).

定理 3 设 X 是一个 $n\times m$ 布尔矩阵,Y 是一个 $m\times n$ 布尔矩阵,它们都不含零行和零列,则 XY 是本原的当且仅当 YX 是本原的.

证明 设 XY 是本原的,则存在一个正整数 k,使 $(XY)^k$ 是一个全 1 方阵.因 Y 无零行,X 无零列,故 $(YX)^{k+1}=Y(XY)^kX$ 也是一个 1 方阵,从而 YX 是本原的.若 YX 是本原的,同理可证 XY 也是本原的.

引理 1 若有向图 G 是强连通的,则 $k(G)=0$ 当且仅当 G 是一个有向圈.

证明 若 G 是一个有向圈,显然 $k(G)=0$.

反之,设 $k(G)=0$.G 的阶为 1 的情形是显然的.设 G 的阶大于 1,则 $p=p(G)>1$.这时 $V(G)$ 可划分为 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_p$,且 G 的任一条弧都是从某个 V_i 中的点到 $V_{i+1}(V_{p+1}=V_1)$ 中的点的弧.若 G 不是有向圈,则存在 $|V_i|\geqslant 2$,从而存在 $u,v\in V_i$,$u\neq v$,从 u 到 v 有长为 p 的途径.由幂敛指数的定义,$k(G)>0$.矛盾.

文[3]的另一个主要结果(定理 5)是:若 G 是阶大于 1 的本原有向图,则 $\gamma(LG)=\gamma(G)+1$.事实上,我们有一个更广泛的结论.

定理 4 若有向图 G 是强连通的,阶大于 1,且 G 不是有向圈,则 $k(LG)=k(G)+1$.

证明 由定理 1,$k(LG)\leqslant k(G)+1$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

因 G 不是有向圈，由引理 1，$k(G) \geqslant 1$. 由幂敛指数的定义，G 中存在两点 u,v，从 u 到 v 有长为 $k(G)-1$ 的途径当且仅当从 u 到 v 没有长为 $k(G)-1+p(G)$ 的途径. 由于 G 是强连通的，在 G 中 u,v 点处分别有入弧 (x,u) 和出弧 (v,y). 于是，在 LG 中从 (x,u) 到 (v,y) 有长为 $k(G)$ 的途径当且仅当从 (x,u) 到 (v,y) 没有长为 $k(G)+p(G)$ 的途径，从而 $k(LG) > k(G)$. 故 $k(LG) = k(G)+1$.

感谢柳柏濂教授的指导.

参考文献：

[1] HEMMINGER R L and BEINEKE L W. *Line graphs and line digraphs*, in: *Selected Topics in Graph Theory (ed. Beineke L W and Wilson R J)* [M]. Academic Press, 1978, 271—305.

[2] 林国宁，张福基. 有向线图的特征多项式和一类同谱有向图 [J]. 科学通报，1983，**22**：1348—1350.
LIN Guo-ning, ZHANG Fu-ji. *On the characteristic polynomial of directed line graph and a type of cospectral directed graph* [J]. Chinese Science Bulletin, 1983, **12**: 1348—1350. (in Chinese)

[3] 左光纪. 线有向图的幂敛指数 [J]. 应用数学学报，1998，**21**：144—147.
ZUO Guang-ji. *On the indices of convergence of line digraphs* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1998, **21**: 144—147. (in Chinese)

[4] 柳柏濂. 组合矩阵论 [M]. 北京：科学出版社，1996.
LIU Bo-lian. *Combinatorial Matrix Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)

The Index of Convergence of a Line Digraph

ZHOU Bo

(Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: By using the matrix representation of a digraph, some results about the index of convergence and period of a line digraph are obtained.

Key words: line digraph; index of convergence; Boolean matrix.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.