第21卷第3期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

带有多变滞量的高阶非线性中立型差分方程的振动性判据*

孙书荣， 韩振来
（济南大学数学系，山东 济南 250002）

摘 要：研究了较为广泛的一类带有多个变滞量的高阶非线性中立型差分方程的振动性，建立了这类方程振动的一个充要条件和一个充分条件.

关键词：中立型差分方程；滞量；振动性；最终负解.
分类号：AMS(1991) 39A10/CLC O175.7
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)03-0403-07

1 引 言

关于低阶时滞中立型差分方程振动性的研究已有大量的结果，如文[1]—[3]. 而关于任意高阶的情形尚不多见，文[4]研究了一类高阶差分方程有界解的振动性. 本文将讨论较为广泛的一类带有多个变滞量的高阶非线性中立型差分方程

$$\Delta^d\left(a(n)x(n)-\sum_{i=1}^{m}b_i(n)x(n-k_i)\right)=\sum_{j=1}^{s}f_j(n,x(n),x(n-\tau_j(n))),n\in N \quad (1.1)$$

的振动性，其中 $N=\{0,1,2,\cdots\}$，d,m,s 为任意固定自然数，$k_i,\tau_j(n)\in N(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s)$.

为叙述方便，本文假设以下条件：

(I_1) $\bar{k}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{k_i\}$ 与 $\bar{\tau}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\tau_j(n)\mid n\in N\}$ 是有界的；

(I_2) $a(n)$ 与 $b_i(n)$ 是有界实数列且 $a(n)>0,b_i(n)\geqslant 0,a(n)\geqslant\sum_{i=1}^{m}b_i(n)$；

(I_3) $f_j(t,-v,-w)=-f_j(t,v,w)(j=1,2,\cdots,s)$；

(I_4) $f_j(t,v,w)\in C[R^+,R\times R]$，且关于 v,w 单调递减，$R^+=[0,+\infty]$；

(I_5) 当 $v^2+w^2\neq 0$ 时，$\sum_{j=1}^{s}f_j(t,v,w)\neq 0$；

(I_6) 存在实数列 $P_j(n)\geqslant 0,Q_j(n)\geqslant c_j>0$ （c_j 为常数），当 $n\in N,v\leqslant 0,w\leqslant 0$ 时，有

* 收稿日期：1998-06-23
作者简介：孙书荣(1964-)，女，山东烟台人，济南大学副教授.
E-mail：ydwlch@jn-public.sd.cninfo.net

$$f_j(n,v,w) \geqslant M_j(P_j(n)v + Q_j(n)w),$$
这里 $M_j < 0$ 为常数($j = 1,2,\cdots,s$).

2 基本引理

为后面证明的需要,先给出下面两个引理.

引理 2.1 设满足条件(Ⅰ$_1$)—(Ⅰ$_5$).若差分不等式

$$\Delta^d(a(n)x(n) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n)x(n-k_i)) \geqslant \sum_{j=1}^{s} f_j(n,x(n),x(n-\tau_j(n))) \qquad (2.1)$$

有最终负解$\{x(n)\}$,则存在自然数 $\tilde{n}_0$,当 $n \geqslant \tilde{n}_0$ 时,有

$$\Delta^d u(n) > 0, \Delta^{d-1}u(n) < 0, \cdots, (-1)^{d+1}\Delta u(n) > 0, (-1)^d u(n) > 0,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{i+d}\Delta^i u(n) = \alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 0,1,\cdots,d-1),$$

这里 $u(n) = a(n)x(n) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n)x(n-k_i)$.

证明 由于差分不等式(2.1)有最终负解$\{x(n)\}$,由条件(Ⅰ$_1$),存在自然数 n_1,当 $n \geqslant n_1$ 时,有 $x(n) < 0, x(n-k_i) < 0, x(n-\tau_j(n))) < 0$;由条件(Ⅰ$_3$)和(Ⅰ$_4$)得

$$f_j(n,x(n),x(n-\tau_j(n))) \geqslant 0,\ n \geqslant n_1,$$

由条件(Ⅰ$_5$)得 $\sum_{j=1}^{s} f_j(n,x(n),x(n-\tau_j(n))) \neq 0, n \geqslant n_1$,所以 $\Delta^d u(n) > 0, n \geqslant n_1$.

下证 $\lim_{n\to\infty}\Delta^{d-1}u(n) = \alpha_{d-1} \leqslant 0$.

首先证明 $\Delta^{d-1}u(n)$ 有上界.若不然,由 $\Delta^d u(n) > 0$,推出 $\lim_{n\to\infty}\Delta^{d-1}u(n) = +\infty$.从而当 n 充分大以后,有 $\Delta^{d-1}u(n) > 0$,所以 $\Delta^{d-2}u(n)$ 递增且无界.这样推下去,将得到 $u(n)$ 递增且无界,因此 $\lim_{n\to\infty}u(n) = +\infty$,注意到条件(Ⅰ$_2$),可推得 $x(n)$ 无界.于是存在自然数 $n_2 > n_1 + \bar{k}$,使 $u(n_2) > 0, x(n_2) \leqslant x(n_2 - k_i)(i = 1,2,\cdots,m)$,因此

$$0 < u(n_2) = a(n_2)x(n_2) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n_2)x(n_2-k_i) \leqslant a(n_2)x(n_2) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n_2)x(n_2) \leqslant 0,$$

矛盾.故 $\Delta^{d-1}u(n)$ 有上界.所以存在常数 $\alpha_{d-1} < +\infty$,使 $\lim_{n\to\infty}\Delta^{d-1}u(n) = \alpha_{d-1}$.

下面证明 $\alpha_{d-1} \leqslant 0$.若不然,则存在自然数 n_3,当 $n \geqslant n_3$ 时,有 $\Delta^{d-1}u(n) > 0$.

若 $x(n)$ 为无界负解,则存在自然数 $n_4 \geqslant n_3$,使 $x(n_4) \leqslant x(n_4 - k_i)$ $(i = 1,2,\cdots,m)$,所以

$$\begin{aligned}0 < \Delta^{d-1}u(n_4) &= \Delta^{d-1}(a(n_4)x(n_4) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n_4)x(n_4-k_i)) \\ &\leqslant \Delta^{d-1}(\sum_{i=1}^{m} b_i(n_4)x(n_4) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n_4)x(n_4-k_i)) \leqslant 0,\end{aligned}$$

矛盾.

若 $x(n)$ 为有界负解,则存在常数 $\alpha' > 0$,当 n 充分大以后有 $\Delta^{d-1}u(n) > \alpha'$,由此将推出 $\Delta^{d-2}u(n)$ 无界,从而可推出 $x(n)$ 无界,矛盾.所以 $\lim_{n\to\infty}\Delta^{d-1}u(n) = \alpha_{d-1} \leqslant 0$,因此当 n 充分大以

后有 $\Delta^{d-1}u(n) < 0$.

一般地，可得$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{i+d}\Delta^i u(n) = \alpha_i \geqslant 0$，且存在自然数 $\tilde{n}_0$，当 $n \geqslant \tilde{n}_0$ 时，有

$$\Delta^{d-2}u(n) > 0, \cdots, (-1)^{d+1}\Delta u(n) > 0, (-1)^d u(n) > 0. \qquad \square$$

引理 2.2　设满足条件(Ⅰ$_3$)，则差分不等式(2.1)无最终负解当且仅当差分不等式

$$\Delta^d\Big(a(n)x(n) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n)x(n-k_i)\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{s} f_j(n, x(n), x(n-\tau_j(n))) \tag{2.2}$$

无最终正解.

证明　*必要性*. 假如(2.2)式有最终正解 $x(n)$，则

$$-\Delta^d\Big(a(n)x(n) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n)x(n-k_i)\Big) \geqslant -\sum_{j=1}^{s} f_j(n, x(n), x(n-\tau_j(n))),$$

亦即

$$\Delta^d(a(n)(-x(n)) - \sum_{j=1}^{m} b_i(n)(-x(n-k_i)) \geqslant \sum_{j=1}^{s} f_j(n, -x(n), -x(n-\tau_j(n))),$$

这说明 $-x(n)$ 是(2.1)式的最终负解，与已知矛盾.

充分性. 同理易证. $\square$

3　主要结果及证明

定理 3.1　若满足条件(Ⅰ$_1$)～(Ⅰ$_5$)，则差分方程(1.1)振动的充要条件是差分不等式(2.1)无最终负解.

证明　充分性. 因为差分不等式(2.1)无最终负解，由引理 2.2 可知，差分不等式(2.2)无最终正解，所以方程(1.1)振动.

必要性. 以下分两种情况证明.

(Ⅰ)当 d 为奇数时. 假定差分不等式(2.1)有最终负解 $x(n)$，则存在自然数 $\bar{n}_0 \geqslant \tilde{n}_0$，当 $n \geqslant \bar{n}_0$ 时，有 $x(n) < 0, x(n-k_i) < 0, x(n-\tau_j(n)) < 0 (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,s)$. 又由引理 2.1 知，对差分不等式(2.1)关于 n 从 n 到 $m_1 - 1 (m_1 - 1 > n \geqslant \bar{n}_0)$ 作和，得

$$\Delta^{d-1}u(m_1) - \Delta^{d-1}u(n) \geqslant \sum_{\xi=n}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{s} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi))),$$

结合条件(Ⅰ$_3$)，(Ⅰ$_4$)及引理 2.1，得$\sum\limits_{\xi=n}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi)))$ $(j = 1,2,\cdots,s)$ 收敛，且

$$-\Delta^{d-1}u(n) \geqslant \sum_{j=1}^{s} \sum_{\xi=n}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi))), \tag{3.1}$$

对(3.1)式关于 n 从 n 到 $m_2 - 1$ 作和，再结合条件及引理 2.1，得

$$\Delta^{d-2}u(n) \geqslant \sum_{j=1}^{s} \sum_{t=n}^{\infty} \sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi))),$$

这样作下去，一共作 d 次，得 $-u(n) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{s} \sum\limits_{w=n}^{\infty} \cdots \sum\limits_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi)))$，所以

$$a(n)x(n) \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i(n)x(n-k_i) - \sum_{j=1}^{s} \sum_{w=n}^{\infty} \cdots \sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi-\tau_j(\xi))). \tag{3.2}$$

选取 $n_0 > \bar{n}_0$，且 $n \geqslant n_0$ 时，$n - k_i \geqslant \bar{n}_0, n - \tau_j(n) \geqslant \bar{n}_0 (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,s)$，再选取自然数 $N > n_0$ 且 $n \geqslant N$ 时，$n - k_i \geqslant n_0, n - \tau_j(n) \geqslant n_0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(n - \tau_j(n)) = \infty$，因此 N 是存在的.

采用下面记号：

$$F^n y(n) = \frac{1}{a(n)}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_i(n) y(n-k_i) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{w=n}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, y(\xi), y(\xi - \tau_j(\xi)))\Big],$$

$$F^N y(n) = \frac{1}{a(n)}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_i(n) y(n-k_i) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{w=N}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, y(\xi), y(\xi - \tau_j(\xi)))\Big],$$

$$F^N y(n_0) = \frac{1}{a(n_0)}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_i(n_0) y(n_0-k_i) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{w=N}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, y(\xi), y(\xi - \tau_j(\xi)))\Big],$$

$$Ny(n) = \begin{cases} F^n y(n), n \geqslant N, \\ F^N y(n) + \dfrac{1}{a(n)}(u(n) - u(N)), n_0 \leqslant n < N, \\ F^N y(n) + \dfrac{1}{a(n_0)}(u(n_0) - u(N)), \underline{n_0} \leqslant n < n_0, \end{cases}$$

$$x^0(n) = \begin{cases} x(n), n \geqslant n_0, \\ x(n_0), \underline{n_0} \leqslant n < n_0, \end{cases}$$

其中 $\underline{n_0} = n_0 - \bar{k}$. 从形式上构造数列如下：

$$y_0(n) = x^0(n), n \geqslant \underline{n_0}; y_k(n) = Ny_{k-1}(n), n \geqslant \underline{n_0}, k = 1,2,\cdots.$$

用数学归纳法证明序列 $y_k(n)$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上有定义、非正且对 k 单调增加.

显然 $y_0(n)$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上有定义且为负. 考察 $y_1(n)$：当 $n \geqslant N$ 时，由于

$$y_1(n) = Ny_0(n) = Nx^0(n) = Nx(n) = F^n x(n)$$
$$= \frac{1}{a(n)}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_i(n) x(n-k_i) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{w=n}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi - \tau_j(\xi)))\Big],$$

由此可见，$y_1(n)$ 在 $n \geqslant N$ 上有定义且非正. 再由(3.2)式可知，

$$y_1(n) \geqslant x(n) = x^0(n) = y_0(n),$$

即 $0 \geqslant y_1(n) \geqslant y_0(n)$.

当 $n_0 \leqslant n < N$ 时，因为

$$y_1(n) = Ny_0(n) = Nx^0(n) = Nx(n) = F^N x(n) + \frac{1}{a(n)}(u(n) - u(N))$$
$$= \frac{1}{a(n)}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_i(n) x(n-k_i) - \sum_{j=1}^{s}\sum_{w=N}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi - \tau_j(\xi))) + (u(n) - u(N))\Big],$$

所以，$y_1(n)$ 在 $n_0 \leqslant n < N$ 上有定义且由引理 2.1 可知 $y_1(n)$ 非正. 又因为

$$y_1(n) = x(n) - \frac{a(N)}{a(n)}x(N) + \frac{a(N)}{a(n)}\Big[\frac{1}{a(N)}\sum_{i=1}^{m} b_i(N) x(N-k_i) - \frac{1}{a(N)}\sum_{j=1}^{s}\sum_{w=N}^{\infty}\cdots\sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, x(\xi), x(\xi - \tau_j(\xi)))\Big] \geqslant x(n) = y_0(n),$$

即 $0 \geqslant y_1(n) \geqslant y_0(n)$.

当 $\underline{n_0} \leqslant n < n_0$ 时，与前面类似可知，$y_1(n)$ 有定义、非正，且

$$y_1(n) = Ny_0(n) = F^N y_0(n_0) + \frac{1}{a(n_0)}(u(n_0) - u(N)) \geqslant x(n_0) = y_0(n),$$

即 $0 \geqslant y_1(n) \geqslant y_0(n)$.

综上所述，当 $n \geqslant \underline{n_0}$ 时，$y_1(n)$ 有定义且 $0 \geqslant y_1(n) \geqslant y_0(n)$.

假设 $y_k(n)$ 与 $y_{k-1}(n)$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上有定义且 $0 \geqslant y_k(n) \geqslant y_{k-1}(n)$，下面证明 $y_{k+1}(n)$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上有定义且 $0 \geqslant y_{k+1}(n) \geqslant y_k(n)$.

事实上，由 $0 \geqslant y_k(n) \geqslant y_0(n) = x^0(n)$，由条件($\mathrm{I}_3$)、($\mathrm{I}_4$) 不难得到

$$0 \leqslant f_j(n, y_k(n), y_k(n - \tau_j(n))) \leqslant f_j(n, x^0(n), x^0(n - \tau_j(n))),$$

再由 $\sum\limits_{w=N}^{\infty} \cdots \sum\limits_{\xi=t}^{\infty} f_j(n, x(n), x(n - \tau_j(n)))$ 收敛，可得 $\sum\limits_{w=N}^{\infty} \cdots \sum\limits_{\xi=t}^{\infty} f_j(n, y_k(n), y_k(n - \tau_j(n)))$ 收敛.
故当 $n \geqslant \underline{n_0}$ 时，由 $y_{k+1}(n) = Ny_k(n)$ 易知 $y_{k+1}(n)$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上有定义、非正且

$$f_j(n, y_k(n), y_k(n - \tau_j(n))) \leqslant f_j(n, y_{k-1}(n), y_{k-1}(n - \tau_j(n))), n \geqslant N, j = 1, 2, \cdots s,$$

因此

$$y_{k+1}(n) - y_k(n) = Ny_k(n) - Ny_{k-1}(n)$$
$$= \begin{cases} F^n y_k(n) - F^n y_{k-1}(n) \geqslant 0, n \geqslant N, \\ F^N y_k(n) - F^N y_{k-1}(n) \geqslant 0, n_0 \leqslant n < N, \\ F^N y_k(n_0) - F^N y_{k-1}(n_0) \geqslant 0, \underline{n_0} \leqslant n < n_0. \end{cases}$$

故 $y_{k+1}(n) \geqslant y_k(n), n \geqslant \underline{n_0}$. 因此 $\{y_k(n)\}$ 在 $n \geqslant \underline{n_0}$ 上为关于 k 的单调增加、非正数列，从而存在 $y(n) \leqslant 0$，使对任意 $n \geqslant \underline{n_0}$，有 $\lim\limits_{k \to \infty} y_k(n) = y(n)$. 所以

$$y(n) = \begin{cases} F^n y(n), n \geqslant N, \\ F^N y(n) + \dfrac{1}{a(n)}(u(n) - u(N)), n_0 \leqslant n < N, \\ F^N y(n_0) + \dfrac{1}{a(n_0)}(u(n_0) - u(N)), \underline{n_0} \leqslant n < n_0. \end{cases}$$

即对任意 $n \geqslant N$，$y(n)$ 是方程(1.1) 的解，而且 $y(n) \leqslant 0, n \geqslant n_0$. 记

$$\tilde{u}(n) = a(n)y(n) - \sum_{i=1}^{m} b_i(n) y(n - k_i), \tag{3.3}$$

因为当 $n \geqslant N$ 时，$n - k_i \geqslant n_0$ 及 $n - \tau_j(n) \geqslant n_0$，所以

$$y(n - k_i) \leqslant 0, y(n - \tau_j(n)) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, s).$$

对(3.3) 式作 d 阶差分，再关于 n 作和 d 次，得

$$\tilde{u}(n) \leqslant - \sum_{j=1}^{s} \sum_{w=n}^{\infty} \cdots \sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, y(\xi), y(\xi - \tau_j(\xi))), n \geqslant N, \tag{3.4}$$

当 $n_0 \leqslant n < N$ 时，有

$$\tilde{u}(n) \leqslant - \sum_{j=1}^{s} \sum_{w=N}^{\infty} \cdots \sum_{\xi=t}^{\infty} f_j(\xi, y(\xi), y(\xi - \tau_j(\xi))) + u(n) - u(N) \leqslant u(n) - u(N) < 0,$$

由 $y(n) \leqslant \tilde{u}(n) < 0$，得 $y(n) < 0, n_0 \leqslant n < N$.

可以断定，对任意自然数 $n \geqslant n_0$，皆有 $\tilde{u}(n) < 0$.

若不然，假定存在自然数 $\bar{n} \geqslant N$，有 $\tilde{u}(\bar{n}) = 0$. 记 $n^* = \min\{\bar{n} | \tilde{u}(\bar{n}) = 0, \bar{n} \geqslant N\}$，那么当 $n_0 \leqslant n < n^*$ 时，有 $\tilde{u}(n) < 0, y(n) < 0$. 显然 $n^* \geqslant N$，且 $\tilde{u}(n^*) = 0$；当 $n^* \geqslant N$ 时，有 $n^* > n^* - \tau_j(n^*) \geqslant n_0$，故 $y(n^* - \tau_j(n^*)) < 0 (j = 1,2,\cdots,s)$. 于是

$$\Delta^d u(n^*) = \sum_{j=1}^{s} f_j(n^*, y(n*), y(n^* - \tau_j(n^*))) > 0,$$

从而当 $n > n^*$ 时，有 $\tilde{u}(n) > 0$，这与(3.4) 式相矛盾，故有 $\tilde{u}(n) < 0, n \geqslant n_0$.

由 $y(n) \leqslant \tilde{u}(n) < 0$，得 $y(n) < 0, n \geqslant n_0$. 这就意味着 $y(n)$ 是方程(1.1) 的最终负解，这与方程(1.1) 振动相矛盾，故(2.1) 式无最终负解.

(Ⅱ) 当 d 为偶数时，采用上述同样的方法可证：若方程(1.1) 振动，则差分不等式(2.2) 无最终正解，从而(2.1) 式无最终负解. □

定理 3.2 若满足条件(I_1) — (I_4) 及(I_6)，则差分方程(1.1) 是振动的.

证明 (Ⅰ) d 为奇数的情形. 假定差分不等式(2.1) 有最终负解，由条件(I_1) 及引理 2.1，存在自然数 $n_0 \geqslant \tilde{n}_0$，当 $n \geqslant n_0$ 时，$x(n) < 0, x(n - k_i) < 0 \ (i = 1,2,\cdots,m), u(n) < 0$. 由(2.1) 式及条件($\mathrm{I}_6$)，得

$$\Delta^d u(n) \geqslant \sum_{j=1}^{s} f_j(n, x(n), x(n - \tau_j(n))) \geqslant \sum_{j=1}^{s} M_j[P_j(n)x(n) + Q_j(n)x(n - \tau_j(n))],$$

关于 n 从 n_0 到 $n-1$ 作和，得

$$\Delta^{d-1}u(n) - \Delta^{d-1}u(n_0) \geqslant \sum_{j=1}^{s} M_j[\sum_{\xi=n_0}^{n-1}(P_j(\xi)x(\xi) + Q_j(\xi)x(\xi - \tau_j(\xi)))],$$

令 $n \to \infty$，得 $\alpha_{d-1} - \Delta^{d-1}u(n_0) \geqslant \sum_{j=1}^{s} M_j[\sum_{\xi=n_0}^{\infty}(P_j(\xi)x(\xi) + Q_j(\xi)x(\xi - \tau_j(\xi)))]$，所以 $\sum_{n=n_0}^{\infty} Q_j(n)x(n - \tau_j(n))$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} x(n - \tau_j(n))$ 收敛($j = 1,2,\cdots,s$)，因此 $\lim_{n\to\infty} x(n - \tau_j(n)) = 0$. 另一方面可得

$$x(n) < \frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^{m} b_i(n) x(n - k_i), n \geqslant n_0. \tag{3.5}$$

记 $\underline{k} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m}\{k_i\}$，令 $n_1 = n_0 + \bar{k}$，当 $n_1 - \bar{k} \leqslant n \leqslant n_1$ 时，设 $\max\{x(n)\} = \varepsilon_1 < 0$. 注意到当 $n_1 \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}$ 时，$n_1 - \bar{k} \leqslant n - k_i \leqslant n_1 (i = 1,2,\cdots,m)$，由(3.5)式得

$$\max_{n_1 \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}}\{x(n)\} < \max_{n_1 \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}}\{\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^{m} b_i(n) x(n - k_i)\}$$

$$\leqslant \max_{n_1 \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}}\{\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^{m} b_i(n) \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_1,$$

即

$$\max_{n_1 \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}}\{x(n)\} < \varepsilon_1.$$

假设当 $n_1 + \underline{k} - \bar{k} \leqslant n \leqslant n_1 + \underline{k}$ 时，有 $\max\{x(n)\} \leqslant \varepsilon_1$，则由(3.5) 式，再注意到当 $n_1 + \underline{k} \leqslant n \leqslant n_1 + 2\underline{k}$ 时，有 $n_1 + \underline{k} - \bar{k} \leqslant n - k_i \leqslant n_1 + \underline{k} \ (i = 1,2,\cdots,m)$，得

$$\max_{n_1 + \underline{k} \leqslant n \leqslant n_1 + 2\underline{k}}\{x(n)\} < \max_{n_1 + \underline{k} \leqslant n \leqslant n_1 + 2\underline{k}}\{\frac{1}{a(n)} \sum_{i=1}^{m} b_i(n) x(n - k_i)\} \leqslant \varepsilon_1,$$

所以$\max\limits_{n_1+(r-1)k\leq n\leq n_1+rk}\{x(n)\}<\varepsilon_1(r=1,2,\cdots)$.

故$\limsup\limits_{n\to\infty}\{x(n)\}\leq\varepsilon_1<0$,这与上述结论相矛盾.因此差分不等式(2.1)无最终负解,由定理3.1可知,差分方程(1.1)是振动的.

(Ⅱ)d为偶数的情形.用类似的方法可以证明差分不等式(2.2)无最终正解,从而方程(1.1)振动. □

参考文献:

[1] YU J S, WANG Z C. *Asymptotic behavior and oscillation in neutral delay difference equations* [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1994, **37**: 241—248.

[2] LALLI B S, ZHANG B G. *On existence of positive solutions and bound oscillation for neutral difference equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, **166**: 272—287.

[3] YU J S, Zhang B G, Wang Z C. *Oscillation of delay difference equations* [J]. Applicable Analysis, 1994, **53**: 117—124.

[4] 周效良,燕居让. 高阶非线性差分方程的振动性 [J]. 数学年刊A辑, 1994, **15**: 692—700.
ZHOU Xiao-liang, YAN Ju-rang. *Oscillation for the higher order nonlinear difference equations* [J]. Chinese Annals of Mathematics (Ser. A), 1994, **15**(A): 692—700. (in Chinese)

Oscillation Criteria for the Higher Order Nonlinear Neutral Difference Equations with Several Variable Delay Arguments

SUN Shu-rong, HAN Zhen-lai

(Dept. of Math., Jinan University, Jinan 250002, China)

Abstract: In this paper, we are concerned with the oscillation for the higher order nonlinear neutral difference equations with several variable delay arguments. A necessary and sufficient condition and a sufficient condition of the oscillation for the equations is obtained.

Key words: neutral difference equations; delay arguments; oscillation; eventually negative solution.