第21卷第3期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

n阶脉冲微分方程边值问题*

鲁 世 平

(安徽师范大学数学系，安徽 芜湖 241000)

摘 要：本文利用微分不等式原理及脉冲微分方程初值问题基本理论研究了n类n阶脉冲微分方程边值问题，得到了该边值问题解的存在性及解的存在唯一性的新的结果.

关键词：脉冲微分方程；微分不等式；边值问题；初值问题.

分类号：AMS(1991) 34B15,34K10/CLC O175.8

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)03-0415-06

1 引 言

近年来，脉冲微分方程已成为微分方程理论研究中的一个重要课题，有关脉冲微分方程的稳定性研究，振动性研究，解的存在唯一性基本理论的研究已有很多成果出现[1-4]. 但对于脉冲微分方程边值问题的研究不是很多，最近有些这方面工作出现[5]. 本文利用微分不等式理论建立了一个微分方程初值问题的比较原理，并利用脉冲微分方程基本理论研究了n类n阶脉冲微分方程边值问题：(E_k)

$$\begin{cases} [\rho(t)x^{(n-1)}(t)]' = f(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)),\ t\in(0,T)\text{ 且 }t\neq t_i,\ i=1,2,\cdots,l, & (1)\\ x(0)=C_0,\ x'(0)=C_1,\cdots,x^{(n-2)}(0)=C_{n-2}, & (2)\\ \triangle x|_{t=t_i}=I_i^0(x(t_i),x'(t_i),\cdots,x^{(n-1)}(t_i)),\ i=1,2,\cdots,l, & (3)\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots & \\ \triangle x^{(n-1)}|_{t=t_i}=I_i^{n-1}(x(t_i),x'(t_i),\cdots,x^{(n-1)}(t_i)),\ i=1,2,\cdots,l, & \\ x^{(k)}(T)=A,\quad k\in I_n, & (4) \end{cases}$$

其中$f\in C([0,T]\times R^n,R)$，$\rho(t)\in C^1([0,T],R)$且$\rho(t)>0$，$t\in[0,T]$；$0<t_1<t_2<\cdots<t_l<T$；$I_i^j\in C(R^n,R)$，$i=1,2,\cdots,l$，$j=0,1,2,\cdots,n-1$. $\triangle x^{(j)}|_{t=t_i}=x^{(j)}(t_i^+)-x^{(j)}(t_i^-)$，$x^{(j)}(t_i^+)$，$x^{(j)}(t_i^-)$分别表示$x^{(j)}(t)$在$t=t_i$处的左右极限，$i=1,2,\cdots l$，$j=0,1,2,\cdots,n-1$.

2 主要引理

* 收稿日期：1998-09-25
基金项目：安徽省教委自然科学基金(98JL129)和教育部博士点专项基金(199900722)资助项目
作者简介：鲁世平(1962-)，男，硕士，副教授. 现为北京理工大学博士研究生.
E-mail: lsp.ud@263.net

为了方便起见，本文设条件[C_1]：若存在 $U\in C([0,T]\times R^n,R)$，使得当 $t\in[0,T]$，$x_0\geqslant\widetilde{x}_0,x_1\geqslant\widetilde{x}_1,\cdots,x_{n-1}\geqslant\widetilde{x}_{n-1}$ 时

$$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(t,\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_{n-1})>U(t,x_0-\widetilde{x}_0,x_1-\widetilde{x}_1,\cdots,x_{n-1}-\widetilde{x}_{n-1}),$$

并记脉冲函数 $I_i^j(x(t_i),x'(t_i),\cdots,x^{(n-1)}(t_i))=I_i^j,i=1,2,\cdots,l,j=0,1,2,\cdots,n-1.$

引理 1[6] 对任意的 $C=(C_0,C_1,\cdots,C_{n-1})\in R^n$.

初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)=f(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)) & (5)\\ x(0)=C_0,x'(0)=C_1,\cdots,x^{(n-1)}(0)=C_{n-1} & (6)\end{cases}$$

的解 $x(t,0,C)$ 在 $[0,T]$ 上存在唯一，则 $x(t,0,C)$ 在 $[0,T]$ 上关于初值 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$ 是连续的.

引理 2[4] 若引理 1 条件满足，则相应的脉冲微分方程初值问题：

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)=f(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))\\ x(0)=C_0,x'(0)=C_1,\cdots,x^{(n-1)}(0)=C_{n-1}\\ \triangle x^{(j)}|_{t=t_i}=I_i^j,i=1,2,\cdots,l,j=0,1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

的解在 $[0,T]$ 上存在唯一且关于初值 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$ 是连续的.

引理 3 设 $F\in C([0,T]\times R^n,R)$，初值问题

$$\begin{cases} (\rho(t)x^{(n-1)}(t))'=F(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))\\ x(0)=0,x'(0)=0,\cdots,x^{(n-1)}(0)=\gamma>0\end{cases}$$

和初值问题

$$\begin{cases} (\rho(t)u^{(n-1)}(t))'=U(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(n-1)}(t)) & (7)\\ u(0)=0,u'(0)=0,\cdots,u^{(n-1)}(0)=\eta>0 & (8)\end{cases}$$

在 $[0,T]$ 上分别存在唯一解 $x(t,0,\gamma)$ 和 $u(t,0,\eta)$，若下列条件满足：

[C_2] $U(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 在 $[0,T]\times R^n$ 上关于 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-2}$ 单调不减；

[C_3] 当 $\lambda>1,x_0\geqslant0,x_1\geqslant0,\cdots,x_{n-1}\geqslant0$ 时

$$\lambda U(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\leqslant(<)U(t,\lambda x_0,\lambda x_1,\cdots,\lambda x_{n-1});$$

[C_4] 当 $x_0\geqslant0,x_1\geqslant0,\cdots,x_{n-1}\geqslant0$ 时

$$F(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})>(\geqslant)U(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1});$$

[C_5] 初值问题(7)－(8)在 $[0,T]$ 上的唯一解 $u(t,0,\eta)$ 满足：$u^{(j)}(t,0,\eta)>0,j=0,1,2,\cdots,n-1,t\in[0,T]$. 则当 $\gamma>\eta$ 时，$x^{(j)}(t,0,\gamma)\geqslant\dfrac{\gamma}{\eta}u^{(j)}(t,0,\eta),j=0,1,\cdots,n-1.$

证明 由 $\gamma>\eta>0$ 知 $\exists\ \epsilon>0$ 使得 $\dfrac{\gamma-\epsilon}{\eta}>1$. 令 $S(t)=x(t,0,\gamma)-\dfrac{\gamma-\epsilon}{\eta}u(t,0,\eta)$，得 $S(0)=S'(0)=\cdots=S^{(n-2)}(0)=0$，$S^{(n-1)}(0)=\epsilon>0$. 由 $S(t)$ 在 $[0,T]$ 上 n 阶连续可微得，存在 $\delta>0$，使得当 $t\in(0,\delta]$ 时有 $S(t)>0,S'(t)>0,\cdots,S^{(n-1)}(t)>0$. 令 $t_0\in(\delta,T]$. 使得当 $t\in(0,t_0)$ 时有 $S(t)>0,\cdots,S^{(n-1)}(t)>0$ 且 $S^{(n-1)}(t_0)=0$. 故得

$$S^{(n)}(t_0)=x^{(n)}(t_0,0,\gamma)-\frac{\gamma-\epsilon}{\eta}u^{(n)}(t_0,0,\eta)\leqslant0. \qquad (9)$$

但另一方面由条件[C$_3$],[C$_4$],[C$_5$]得：

$$\begin{aligned}\rho(t_0)S^{(n)}(t_0) &= \rho'(t_0)S^{(n-1)}(t_0)+\rho(t_0)S^{(n)}(t_0)=(\rho(t)S^{(n-1)}(t))'|_{t=t_0}\\ &\geqslant F(t_0,x(t_0,0,\gamma),x'(t_0,0,\gamma),\cdots,x^{(n-1)}(t_0,0,\eta))-\\ &\quad U(t_0,\frac{\gamma-\varepsilon}{\eta}u(t_0,0,\eta),\frac{\gamma-\varepsilon}{\eta}u'(t_0,0,\eta),\cdots,\frac{\gamma-\varepsilon}{\eta}u^{(n-1)}(t_0,0,\eta))\\ &> 0.\end{aligned}$$

由此可得 $S^{(n)}(t_0)>0$,这与(9)相矛盾. 故对一切 $t\in[0,T]$均有 $S^{(j)}(t)>0,j=0,1,2,\cdots,n-1$. 即 $x^{(j)}(t,0,\gamma)>\frac{\gamma-\varepsilon}{\eta}u^{(j)}(t,0,\eta),t\in[0,T],j=0,1,2,\cdots,n-1$. 由于 ε 是任意小的正数,故得

$$x^{(j)}(t,0,\gamma)\geqslant\frac{\gamma}{\eta}u^{(j)}(t,0,\eta),t\in[0,T],j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

类似于引理 3 可得：

引理 4 设 $F\in C([0,T]\times R^n,R)$,$t_0\in(0,T)$,对于 $\bar{\gamma}=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1})\in R^n$,$\bar{\eta}=(\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\in R_n$,初值问题

$$\begin{cases}x^{(n)}(t)=F(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))\\ x(t_0)=\gamma_0>0,x'(t_0)=\gamma_1>0,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\gamma_{n-1}>0.\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}u^{(n)}(t)=U(t,u(t),u'(t),\cdots,u^{(n-1)}(t))\\ u(t_0)=\eta_0>0,u'(t_0)=\eta_1>0,\cdots,u^{(n-1)}(t_0)=\eta_{n-1}>0\end{cases}$$

在$[t_0,T]$上分别存在唯一解 $x(t,t_0,\bar{\gamma})$和 $u(t,t_0,\bar{\eta})$,若条件[C_2][C_3][C_4]满足且 $u^{(j)}(t,t_0,\bar{\eta})>0,j=0,1,2,\cdots,n-1$. $t\in[t_0,T]$,则当 $\gamma^*>\eta^*>0$ 时有

$$x^{(j)}(t,t_0,\bar{\gamma})\geqslant\frac{\gamma^*}{\eta^*}u^{(j)}(t,t_0,\bar{\eta}),t\in[t_0,T],j=0,1,2,\cdots,n-1,$$

其中 $\gamma^*=\min\{\gamma_0,\gamma_1,\cdots\gamma_{n-1}\}$,$\eta^*=\max\{\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}\}$.

3 主要结果

定理 1 假设下列条件均满足；

[H$_1$] 条件[C$_1$],[C$_2$],[C$_3$]满足.

[H$_2$] 对任意的 $\gamma\in R$,$\bar{C}=(C_0,C_1,\cdots,C_{n-2})\in R^{n-1}$,初值问题

$$\begin{cases}(\rho(t)x^{(n-1)}(t))'=f(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t))\\ x(0)=C_0,x'(0)=C_1,\cdots,x^{(n-2)}(0)=C_{n-2},x^{(n-1)}(0)=\gamma\end{cases}$$

在[0,T]上存在唯一解 $x(t,\bar{C},\gamma)$；

[H$_3$] $\exists\ \eta>0$,使得初值问题(7)－(8)在$[0,T]$上存在唯一解 $u(t,0,\eta)$满足 $u^{(j)}(t,0,\eta)>0,t\in[0,T],j=0,1,2,\cdots,n-1$；

[H$_4$] $I_i^j(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$关于 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$单调不减. $i=1,2,\cdots,l,j=0,1,2,\cdots,n-1$. 则对任意的 $C_i\in R,i=0,1,\cdots,n-2$. $A\in R$,边值问题(E_k)至少存在一个解.

证明 令 $m=\min\{\eta,\min\limits_{t\in[t_1,T]}u(t,0,\eta),\min\limits_{t\in[t_1,T]}u'(t,0,\eta),\cdots,\min\limits_{t\in[t_1,T]}u^{(n-1)}(t,0,\eta)\}$,$M=$

$\max\limits_{0\le j\le n-1}\{\max\limits_{t\in[t_1,T]} u^{(j)}(t,0,\eta)\}$. 取 $\Gamma>\gamma$ 满足

$$\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}\left(\frac{m}{M}\right)^l>1, \tag{10}$$

并设 $z(t,\Gamma,\gamma)=x(t,\bar{C},\Gamma)-x(t,\bar{C},\gamma)$，则 $z(t,\Gamma,\gamma)$ 满足：

$$\begin{aligned}(\rho(t)z^{(n-1)}(t))'=&f(t,x(t,\bar{C},\gamma)+z(t,\Gamma,\gamma),x'(t,\bar{C},\gamma)+\\&z'(t,\Gamma,\gamma),\cdots,x^{(n-1)}(t,\bar{C},\gamma)+z^{(n-1)}(t,\Gamma,\gamma))-\\&f(t,x(t,\bar{C},\gamma),x'(t,\bar{C},\gamma),\cdots,x^{(n-1)}(t,\bar{C},\gamma))\\\overset{\triangle}{=}&F(t,z(t,\Gamma,\gamma),z'(t,\Gamma,\gamma),\cdots,z^{(n-1)}(t,\Gamma,\eta)),\end{aligned} \tag{11}$$

$$z(0,\Gamma,\gamma)=z'(0,\Gamma,\gamma)=\cdots=z^{(n-2)}(0,\Gamma,\gamma)=0,z^{(n-1)}(0,\Gamma,\gamma)=\Gamma-\gamma,$$

$$\Delta z^{(j)}|_{t=t_i}=\bar{I}_i^j(z(t_i,\Gamma,\gamma),\cdots,z^{(n-1)}(t_i,\Gamma,\gamma)),i=1,2,\cdots,l,j=0,1,2,\cdots,n-1, \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}&\bar{I}_i^j(z(t_i,\Gamma,\gamma),z'(t_i,\Gamma,\gamma),\cdots,z^{(n-1)}(t_i,\Gamma,\gamma))\\&=I_i^j(x(t_i,\bar{C},\gamma)+z(t_i,\Gamma,\gamma),x'(t_i,\bar{C},\gamma)+z'(t_i,\Gamma,\gamma),\cdots,x^{(n-1)}(t_i,\bar{C},\gamma)+\\&\quad z^{(n-1)}(t_i,\Gamma,\gamma))-I_i^j(x(t_i,\bar{C},\gamma),x'(t_i,\bar{C},\gamma),\cdots,x^{(n-1)}(t_i,\bar{C},\gamma)),\\&\qquad i=1,2,\cdots,l,j=0,1,2,\cdots,n-1.\end{aligned} \tag{13}$$

由(1)知 $\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}>1$，故由引理 3 知，当 $t\in(0,t_1)$ 时有 $z^{(k)}(t,\Gamma,\gamma)\geqslant\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}u^{(k)}(t,0,\eta)$, $k\in I_n$.

当 $t\in(t_1,t_2)$ 时，由$[H_4]$及(12)，(13)易得

$$\begin{aligned}z^{(j)}(t_1^+,\Gamma,\gamma)&=z^{(j)}(t_1^-,\Gamma,\gamma)+\bar{I}_1^{(j)}\geqslant z^{(j)}(t_1^-,\Gamma,\gamma)\geqslant\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}u^{(j)}(t_1,0,\eta)\\&\geqslant\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}m,\ j=0,1,2,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

故由引理 4 知当 $t\in(t_1,t_2)$ 时有

$$z^{(k)}(t,\Gamma,\gamma)\geqslant\left(\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}m/M\right)u^{(k)}(t,0,\eta)=\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}\frac{m}{M}u^{(k)}(t,0,\eta),\ k\in I_n.$$

由数学归纳法易证：当 $t\in(t_l,T]$ 时有 $z^{(k)}(t,\Gamma,\gamma)\geqslant\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}\left(\frac{m}{M}\right)^l u^{(k)}(t,0,\eta)$, $k\in I_n$，因而有

$$z^{(k)}(T,\Gamma,\gamma)\geqslant\frac{\Gamma-\gamma}{\eta}\left(\frac{m}{M}\right)^l u^{(k)}(t,0,\eta),\ k\in I_n. \tag{14}$$

由(14)固定 γ 得 $\lim\limits_{\Gamma\to+\infty}z^{(k)}(T,\Gamma,\gamma)=+\infty$, $k\in I_n$，即 $\lim\limits_{\Gamma\to+\infty}x^{(k)}(T,\bar{C},\Gamma)=+\infty$, $k\in I_n$. 类似可证 $\lim\limits_{\gamma\to-\infty}x^{(k)}(T,\bar{C},\Gamma)=-\infty$, $k\in I_n$，故由条件$[H_2]$并结合引理 2 得到至少存在 $\Gamma_0\in R$ 使得 $x^{(k)}(T,\bar{C},\Gamma_0)=A$, $k\in I_n$，即边值问题(E_k)至少存在一个解.

注 1 若将定理 1 中的$[H_4]$换为：I_i^j 关于 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 有界，则相应的结论仍正确.

定理 2 设下列条件均满足

Ⅰ. 条件$[\mathrm{H}_2]$，$[\mathrm{H}_4]$满足；

Ⅱ. $f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 关于 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-2}$ 单调不减，关于 x_{n-1} 连续可微且存在 $\mu>0$，使得对 $\forall\ (t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in[0,T]\times R^n$ 均有 $\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\geqslant-\mu$，则对任意的$(C_0,C_1,\cdots,C_{n-2})\in R^{n-1}$ 和 $A\in R$ 边值问题(E_k)存在唯一解.

证明 当 $x_0\geqslant\tilde{x}_0,x_1\geqslant\tilde{x}_1,\cdots,x_{n-1}\geqslant\tilde{x}_{n-1}$ 时，

$$f(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(t,\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_{n-1})$$
$$\geqslant f(t,\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_{n-2},x_{n-1})-f(t,\widetilde{x}_0,\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_{n-2},\widetilde{x}_{n-1})$$
$$\geqslant-\mu(x_{n-1}-\widetilde{x}_{n-1}). \tag{15}$$

取

$$u(t,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})=-\mu x_{n-1}-\sigma, \tag{16}$$

其中 $\sigma>0$ 为常数.由(15)、(16)易得条件[H_1]满足.

考虑初值问题：

$$\begin{cases}(\rho(t)u^{(n-1)}(t))'=-\mu u^{(n-1)}(t)-\sigma, & (17)\\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0,u^{(n-1)}(0)=\eta>0, & (18)\end{cases}$$

其中 $0<\sigma\leqslant\frac{\eta\rho(0)\mu}{2\rho_1}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}T}$，$\rho_0=\min\limits_{t\in[0,T]}\rho(t)$，$\rho_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\rho(t)$.令 $R(t)=\rho(t)u^{(n-1)}(t)$，则 $u^{(n-1)}(t)=\frac{R(t)}{\rho(t)}$，解得 $R(t)=\rho(0)\eta e^{-\int_0^t\frac{\mu}{\rho(\xi)}d\xi}-\sigma\int_0^t e^{-\int_\xi^t\frac{\mu}{\rho(s)}ds}d\xi>\frac{\eta}{2}\rho(0)e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t}$，$t\in[0,T]$，即

$$u^{(n-1)}(t)\geqslant\frac{R(t)}{\rho_1}>\frac{\eta\rho(0)}{2\rho_1}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t},\ t\in[0,T]. \tag{19}$$

由(18)、(19)并结合 Taylor 公式得：

$$u^{(j)}(t,0,\eta)>\frac{t^{n-1-j}\eta\rho(0)}{2(n-1-j)!\rho_1}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t}>0. \tag{20}$$

因而条件[H_3]也满足，故由定理1知，边值问题(E_k)，$k\in I_n$，至少存在一个解.下证其解是唯一的.

假设边值问题(E_k)存在两个解 $x_1(t)$，$x_2(t)$，令：$x_1^{(n-1)}(0)=\sigma_1$，$x_2^{(n-1)}(0)=\sigma_2$，则 $\sigma_1\neq\sigma_2$.不妨设 $\sigma_1>\sigma_2$，并设 $z(t)=x_1(t)-x_2(t)$，则当 $t\in(0,t_1)$ 时，$z(t)$ 满足：

$$\begin{cases}(\rho(t)z^{(n-1)}(t))'=f(t,x_2(t)+z(t),\cdots,x_2^{(n-1)}(t)+z^{(n-1)}(t))-\\ \qquad f(t,x_2(t),x_2'(t),\cdots,x_2^{(n-1)}(t)), & (21)\\ z(0)=0,z'(0)=0,\cdots,z^{(n-2)}(0)=0,\ z^{(n-1)}(0)=\sigma_1-\sigma_2. & (22)\end{cases}$$

由(21)并结合引理3易得(21)－(22)的解 $z(t)$ 满足：

$$z^{(j)}(t)>\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\rho(0)}{2(n-1-j)!\ \rho_1}t^{n-1-j}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t},\ t\in(0,t_1),\ j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

由此可得 $\bar{I}_i^j\triangleq\bar{I}_1^j(z(t_1),z'(t_1),\cdots,z^{(n-1)}(t_1))\geqslant0$，$j=0,1,2,\cdots,n-1$.故得

$$z^{(j)}(t_1^+)=z^{(j)}(t_1^-)+\bar{I}_1^j\geqslant z^{(j)}(t_1^-),j=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{23}$$

当 $t\in(t_1,t_2)$ 时，由(21)、(23)类似于存在性的证明易得

$$z^{(j)}(t)>\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\rho_0^2}{2(n-1-j)!\ \rho_1^2}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t}(t_2-t_1)^{n-1-j},\ j=0,1,2,\cdots,n-1.$$

一般地当 $t\in(t_l,T]$ 时有 $z^{(j)}(t)>\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\rho_0^{l+1}}{2(n-1-j)!\ \rho_1^{l+1}}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t}(t-t_l)^{n-1-j}$，$j=0,1,\cdots,n-1$.故得

$$z^{(k)}(T)>\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\rho_0^{l+1}}{2(n-1-j)!\ \rho_1^{l+1}}e^{-\frac{\mu}{\rho_0}t}(T-t_l)^{n-1-k}>0,\ k\in I_n.$$

这与 $z^{(k)}(T)=x_1^{(k)}-x_2^{(k)}=A-A=0$ 相矛盾.故边值问题(E_k)存在唯一解.

致谢　作者感谢导师郑祖庥教授的指导和帮助.

参考文献：

[1] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *System with Impulsive Effect, Stability, Theory and Applications* [M]. New York, John Wiley and Sons., 1989.

[2] LAKSHMIKANTHAM V, BANIV D D, SINEONOV P S. *Theory of Impulsive Differential Equations* [M]. World, Singapore, 1989.

[3] GUO Da-jun. *Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order impulsive differential equations in Banach Spaces* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **181**: 407—421.

[4] YU Guo-dong. *On the partial stability of impulsive differential equations* [J]. Ann. of Diff. Eqs., 1997, **14**(2): 407—412.

[5] 韦忠礼. 二阶混合型脉冲微分-积分方程边值问题解的存在性 [J]. 数学学报, 1996, **39**(4): 531—539.
WEI Zhong-li. *On the existence of mixed boundary value problems for second order impulsive differential-integro equations* [J]. Acta. Math. Sinica, 1996, **39**(4): 531—539. (in Chinese)

[6] 尤秉礼. 常微分方程补充教程 [M]. 北京：人民教育出版社, 1983.
YOU Bing-li. *The Second Course of Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: People's Education Press, 1983.

Boundary Value Problems for n -th Order Impulsive Differential Equations

LU Shi-ping

(Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: In this paper, we use differential inequality principles and the initial value problems theory of impulsive differential equations to study n types boundary value problems for nth order impulsive differential equations. Some of new results for existence and existence-uniqueness of boundary value problems are obtained.

Key words: impulsive differential equations; differential inequality; boundary value problem; initial value problem.