关于半自反空间的一个闭图定理*

丘 京 辉
(苏州大学数学系，江苏 苏州 215006)

摘 要：本文给出了一个关于半自反 infra-(u)空间的闭图定理. 作为推论，证明了从速完备 Mazur 空间到半自反 infra-(u)空间的闭图线性映照为弱连续、Mackey 连续和强连续的.

关键词：局部凸空间；拓扑对偶空间；闭图定理.
分类号：AMS(1991) 46A03,46A30/CLC O177.3
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)03-0429-04

通过引进网状空间(webbed spaces)的概念，De Wilde ([1]、[2]、[3]) 彻底解决了 Grothendieck 提出的关于闭图定理的著名猜测. 网状空间是一类非常广泛的局部凸空间. 它包括了 Fréchet 空间、(LF)-空间、尺度空间的强对偶、序列式完备的(DF)空间等([4]，§ 35). De Wilde 建立的闭图定理如下：

从超有界型空间 (ultrabornological spaces) 到网状空间中的每个序列式闭图的线性映照必连续 ([4]，§ 35,2(2)).

接着 Eberhardt ([5]) 又发现了当定义域空间为超有界型空间时，使闭图定理成立的最大值域空间类，即所谓 infra-(u) 空间类. 它真包含网状空间类. Eberhardt 建立的闭图定理如下：

从超有界型空间到 infra-(u) 空间中的每个闭图线性映照必连续.

Kōthe 和 De Wilde 在其专著中都曾提及 Macintosh 关于半自反网状空间的闭图定理的研究([3]，Prop. IV. 6. 12；[4]，§ 35,10(1) 和[6]). Macintosh 的闭图定理如下：

设 E 为序列式完备的 Mackey 空间，$(E'\beta(E',E))$ 为完备，F 为半自反的网状空间；则序列式闭图线性映照 $T:E\rightarrow F$ 必连续.

本文拟讨论将值域空间 F 放宽为半自反 infra-(u) 空间的闭图定理，以作为上述已知结果的补充. 我们将不利用几乎连续的概念，而从转置映照关于对偶空间的 Hellinger-Toeplitz 拓扑为连续这一事实出发，利用 Grothendieck 的完备化定理，推导出闭图定理的一种新的形式. Pap 与 Swartz([7]) 曾给出以映照的强连续形式出现的闭图定理. 本文给出的闭图定理将按 Hellinger-Toeplitz 拓扑的连续性的形式出现，这也包括了强连续的情况(关于对偶双的 Hellinger-Toeplitz 拓扑可参见[8]和[9]，11－2). 对于对偶双 $\langle X,Y\rangle$ 来说，我们以 $\alpha(X,Y)$ 记

* 收稿日期：1998-06-18
作者简介：丘京辉(1947-)，男，广东人，教授.

X 上的 Hellinger-Toeplitz 拓扑. 显然，弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 是 X 上关于对偶双 $\langle X,Y\rangle$ 最弱的 Hellinger-Toeplitz 拓扑，而强拓扑 $\beta(X,Y)$ 是 X 上关于对偶双 $\langle X,Y\rangle$ 最强的 Hellinger-Toeplitz 拓扑. 关于 infra-(u) 空间的概念和性质等可参见[4]，§ 35. 以下，总设 E,F 为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间(简称为局部凸空间)，E',F' 分别为它们的拓扑对偶空间，$E^{\#},F^{\#}$ 分别为它们的代数对偶空间.

引理 1 设 (F,t) 为 infra-(u) 空间，F' 为 (F,t) 的拓扑对偶空间，$H\subseteq F'$ 为 $(F',\sigma(F',F))$ 的稠线性子空间. 若 $K\subseteq F$ 为 $\sigma(F,H)$- 紧圆凸集，则 K 有界于 (F,t).

证明 令 $E_k=sp[K]$，p_k 为 K 的 Minkowski 泛函，则 (E_k,p_k) 为赋范空间. 今 K 为 $\sigma(F,H)$- 紧，故 K 为 $\sigma(F,H)$- 完备. 由此可推断 (E_k,p_k) 为 Banach 空间. 作恒同嵌入映照 $I:(E_k,p_k)\to(F,t)$. 因 $I:(E_k,p_k)\to(F,\sigma(F,H))$ 为连续，故必具闭图. 由闭图引理([9]，Lemma 5-5-1)，知 $I:(E_k,p_k)\to(F,t)$ 仍具闭图. 今 (E_k,p_k) 为 Banach 空间，(F,t) 为 infra-(u) 空间；故 $I:(E_k,p_k)\to(F,t)$ 为连续([5]). 于是 $K=I(K)$ 有界于 (F,t).

引理 2 设 $(E,\mathscr{T})$，(F,t) 为局部凸空间. $T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$ 为线性映照. $T':F'\to E^{\#}$ 为 T 的转置映照. 则 T 具闭图当且仅当 $H:=T'^{-1}(E')$ 稠于 $(F',\sigma(F',F))$.

证明 见[9]，Lemma 12-5-2 和[4]，§ 34，5(3).

定理 1 设局部凸空间 $(E,\mathscr{T})$ 的拓扑对偶 $(E',\mathscr{T}')$ 为完备，这里 $\mathscr{T}'$ 为介于(可以等于) $\sigma(E',E)$ 与 $\tau(E',E)$ 之间的任一个局部凸拓扑；并设 (F,t) 为半自反的 infra-(u) 空间. 若线性映照 $T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$ 具闭图，则 $T:(E,\alpha(E,E'))\to(F,\alpha(F,F'))$ 为连续. 这里 $\alpha(E,E')$ 与 $\alpha(F,F')$ 为相同类型的 Hellinger-Toeplitz 拓扑. 特别地，T 为弱连续、Mackey 连续和强连续的.

证明 如引理 2，设 $T':F'\to E^{\#}$ 为 $T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$ 的转置映照. 令 $H:=T'^{-1}(E')\subseteq F'$. 由 T 具闭图，知 H 稠于 $(F',\sigma(F',F))$(引理 2). 考虑 T' 在 H 上的限制，$T_1':=T'|H:H\to E'$. 易验证 $T_1':(H,\sigma(H,F))\to(E',\sigma(E',E))$ 为连续，故由 Hellinger-Toeplitz 定理([9]，Corollary 11-2-6) 知，$T_1':(H,\tau(H,F))\to(E',\tau(E',E))$ 为连续. 又，$\mathscr{T}'\subseteq\tau(E',E)$，故 $T_1':(H,\tau(H,F))\to(E',\mathscr{T}')$ 为连续. 今 $(E',\mathscr{T}')$ 为完备，故可将 T_1' 开拓为连续线性映照 $\tilde{T}_1':(\tilde{H},\tilde{\tau}(H,F))\to(E',\mathscr{T}')$，这里 $(\tilde{H},\tilde{\tau}(H,F))$ 为 $(H,\tau(H,F))$ 的完备化([4]，§ 23，1(4)). 注意上述开拓 $\tilde{T}_1'$ 为 T_1' 所唯一决定. 任取定 $y'\in F'$，我们证：$y'\in\tilde{H}$. 显然 $(H,\tau(H,F))$ 的拓扑为 F 中所有 $\sigma(F,H)$- 紧、圆凸子集在 H 中的极(polars) 所生成. 任取 F 中一个 $\sigma(F,H)$- 紧、圆凸集 K. 因 (F,t) 为 infra-(u) 空间，故由引理 1，知 K 为有界于 (F,t). 又：(F,t) 为半自反，故 K 为 $\sigma(F,F')$- 相对紧. 注意到 K 为 $\sigma(F,H)$- 闭，$\sigma(F,H)\subseteq\sigma(F,F')$；故 K 必为 $\sigma(F,F')$- 闭. 因此，K 为 $\sigma(F,F')$- 紧. 再注意到：$\sigma(F,F')\supseteq\sigma(F,H)$ 且 $\sigma(F,H)$ 为 Hausdorff，故 $\sigma(F,F')|K=\sigma(F,H)|K$. 今 $y'\in F'$，当然 y' 在 K 上的限制 $y'|K$，按 $\sigma(F,F')$ 在 K 上的相对拓扑为连续. 又：$\sigma(F,F')|K=\sigma(F,H)|K$，故 $y'|K$，按 $\sigma(F,H)$ 在 K 上的相对拓扑也连续. 由 Grothendieck 完备化定理，知：$(H,\tau(H,F))$ 的完备化 $\tilde{H}=\{f\in F^{\#}:f$ 在每个 $\sigma(F,H)$- 紧圆凸集 K 上的限制按 $\sigma(F,H)$- 拓扑为连续$\}$(见[9]，Th. 12-2-13 或[4]，§ 21，9(2)). 由此知：$y'\in\tilde{H}$，因而 $F'\subseteq\tilde{H}$，故 $\tilde{T}_1'(F')\subseteq\tilde{T}_1'(\tilde{H})\subseteq E'$. 容易验证：在 F' 上 $\tilde{T}_1'$ 与 T' 一致，故有：$T'(F')\subseteq E'$. 即 $T':F'\to E'$. 由此，$T:(E,\sigma(E,E'))\to(F,\sigma(F,F'))$ 为连续. 据 Hellinger-Toeplitz 定理知，$T:(E,\alpha(E,E'))\to(F,\alpha(F,F'))$ 为连续. 特别地，T 为弱连续、

Mackey 连续和强连续的(分别取 α 为 σ、τ、β 即可).

推论 1 设$(E,\mathscr{T})$为 Mackey 空间且$(E',\mathscr{T}')$为完备，这里，$\mathscr{T}'$为介于(可以等于)$\sigma(E',E)$和$\tau(E',E)$之间的任一个局部凸拓扑；并设(F,t)为半自反的 infra-(u) 空间. 若线性映照$T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$具闭图，则$T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$必连续.

证明 由定理1知$T:(E,\tau(E,E'))\to(F,\tau(F,F'))$为连续. 今$(E,\mathscr{T})$为Mackey空间，即$(E,\mathscr{T})=(E,\tau(E,E'))$，故$T:(E,\mathscr{T})\to(F,\tau(F,F'))$为连续. 又，总有：$\tau(F,F')\supseteq t$，故$T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$为连续.

如我们所知，对于局部凸空间来说，序列式完备性与凸紧性互不蕴涵(见[9],Remark 9-2-16,Prob. 9-2-301,Prob. 14-2-102). 但是 序列式完备性和凸紧性都蕴涵了下述被称为速完备(或局部完备)的性质：X 中每个有界集必含于一个有界 Banach 圆盘中. 这里 X 中的有界 Banach 圆盘乃是指 X 中一个有界圆凸集 B 使 $E_B=sp[B]$ 赋予 B 的 Minkowski 泛函 p_B 时成为 Banach 空间. 显然，速完备性是一种很弱的完备性. 它等价于下述性质：每个收敛于 0 序列的闭圆凸包为紧. 这性质被 Dierolf 所证明([10]).

由定理 1 可推出下述：

推论 2 设$(E,\mathscr{T})$为速完备的 Mazur 空间，(F,t)为半自反的 infra-(u) 空间. 若线性映照$T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$具闭图，则$T:(E,\alpha(E,E'))\to(F,\alpha(F,F'))$为连续. 特别地，$T$ 为弱连续、Mackey 连续和强连续.

证明 因$(E,\mathscr{T})$为 Mazur 空间，故 E' 赋予在$(E,\mathscr{T})$中收敛于 0 序列上的一致收敛拓扑 $\mathscr{T}'_c$ 为完备([9],Th. 8－6－5). 由于$(E,\mathscr{T})$为速完备，故$(E,\mathscr{T})$中每个收敛于 0 序列的闭圆凸包为紧，当然为 $\sigma(E,E')$- 紧圆凸集. 由 Mackey-Arens 定理([4], § 21,4(2)、(3)))，$\sigma(E',E)\subseteq\mathscr{T}'_c\subseteq\tau(E',E)$. 由定理 1，立得结论.

下述推论 3 是显然的.

推论 3 设$(E,\mathscr{T})$为序列式完备(或具凸紧性)的 Mazur 空间，(F,t)为半自反的 infra-(u) 空间. 若线性映照$T:(E,\mathscr{T})\to(F,t)$具闭图，则$T:(E,\alpha(E,E'))\to(F,\alpha(F,F'))$为连续. 特别地 T 为弱连续、Mackey 连续和强连续的.

参考文献：

[1] DE WILDE M. *Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes* [J]. Mém. Soc. Royale Sci. Liège, 1969, **18**(5): 1－144.

[2] DE WILDE M. *Opérateurs ouverts et sous-espaces complémentaires dans un espace ultrabornologique* [J]. Bull. Soc. Royale Sci. Liége, 1969, **38**: 454－458.

[3] DE WILDE M. *Closed Graph Theorems and Webbed Spaces* [M]. Pitman, London, 1978.

[4] KÖTHE G. *Topological Vector Spaces* I, II [M]. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969 and 1979.

[5] EBERHARDT V. *Durch Graphensätze Definierte Lokalkonvexe Räume* [M]. Dissertation München, 1972.

[6] MACINTOSH A. *On the closed graph theorem* [J]. Proc. Amer. Math. Soc. 1969, **20**:397－404.

[7] PAP E, SWARTZ C. *The closed graph theorem for locally convex spaces* [J]. Boll. Un. Mat. Ital.

1990(B), 7(4): 109—111.

[8] QIU Jing-hui. *A general version of Kalton's closed graph theorem* [J]. Acta Math. Sci. 1995, **15**(2): 161—170.

[9] WILANSKY A. *Modern Methods in Topological Vector Spaces* [M]. Blaisdell, New York, 1978.

[10] DIEROLF P. *Une charactérisation des espaces vectoriels complets au sens de Mackey* [J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1976, **283**: 245—248.

A Closed Graph Theorem for Semi-Reflexive Spaces

QIU Jing-hui

(Dept. of Math., Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Abstract: In this paper, a closed graph theorem for semi-reflexive infra-(u) spaces is given. As a corollary, it follows that closed graph linear maps from fast complete Mazur spaces into semi-reflexive infra-(u) spaces are weakly continuous, Mackey continuous and strongly continuous.

Key words: locally convex spaces; topological dual spaces; closed graph theorems.