第21卷第3期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

一类函数空间的刻画*

邱道文
(清华大学计算机科学与技术系，北京 100084)

摘　要：在 Orlicz 空间 $L_\varphi(R^n)$ 中给出一类子空间 $C_\varphi^\alpha(R^n)$，利用一标准算子序列的逼近，得到其等价刻画.

关键词：Sharp 极大函数；光滑空间；算子逼近；Orlicz 空间.
分类号：AMS(1991) 41A35,42B25,46E30/CLC O174.41
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0433-05

1 引言

空间 $C_p^\alpha(R^n)$ 是由 DeVore 和 Sharpley[1] 引进的，即，对 $0<p\leqslant\infty,\alpha>0$，

$$C_p^\alpha(R^n)=\{f\in L^p(R^n):\|f^\#_{\alpha,\min(1,p)}\|_{L^p}<\alpha\},\ \|f\|_{C_p^\alpha}=\|f\|_{L_p}+\|f^\#_{\alpha,\min(1,p)}\|_{L^p}.$$

Triebel[2] 证明了，当 $\alpha>n(\frac{1}{p}-1)^+,0<p\leqslant\alpha$ 时，$C_p^\alpha(R^n)$ 等价于 $F_{p,\infty}^\alpha$，最近，文[3] 利用小波构造的思想引进一算子序列 $\{T_k\}_{k\in Z}$，并定义一极大函数.

$$f_{\alpha,q}^T(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|^{\alpha/n}}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-T_{k_Q}f(y)|^q\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $0<\alpha,q<\infty,f\in L_{\mathrm{loc}}^q(R^n)$，$k_Q$ 是满足 $2^{-k_Q-1}<l(Q)\leqslant2^{-k_Q}$ 的唯一整数，$l(Q)$ 为 Q 的边长. 记 $f_\alpha^T=f_{\alpha,1}^T$，[3] 利用 f_α^T 和 $\{T_k\}_{k\in Z}$ 建立了 $C_p^\alpha(R^n)$ 的一系列等价刻画.

Orlicz 空间是 L^p 空间的推广 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Stromberg[4] 利用 Orlicz 模推广了经典 Hardy 空间 $H^1(R^n)$ 及其对偶空间 BMO. 本文利用 Orlicz 模推广 $C_p^\alpha(R^n)$ 并建立了一些有趣的等价刻画定理. 值得指出的是 $C_p^\alpha(R^n)$ 在适应性多项式逼近[5] 中有重要作用.

在本文，$\mathscr{I}$ 表示 R^n 中的所有方体之集，$\mathscr{I}^k$ 表示边长为 $2^{-k-1}<l(Q)\leqslant2^{-k}$ 的方体之集，D_k 是边长为 2^{-k} 的二进方体之集，$k\in Z$. $A\approx B$ 和 $A\lesssim B$ 分别表示 $C_1\leqslant A\leqslant C_2B$ 和 $A\leqslant C_3B$，C_1,C_2,C_3 为常数.

2 预备知识

* 收稿日期：1998-10-21
基金项目：国家自然科学基金(1963108)、国家杰出青年科学基金(69725004)和中山大学高等学术研究中心基金资助项目
作者简介：邱道文(1968-)，清华大学博士后.
Email：giudw@mail.tsinghua.edu.cn；qudaowen@public.guangzhou.gd.cn

设 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 是 R^n 上的有界函数且满足：

(A1) $\operatorname{supp}\varphi,\tilde{\varphi}\subset[-L,L]^n, L\in N$，在 L^1_{loc} 上定义算子序列 $\{T_k\}_{k\in Z}$，

$$T_k f(x)=\sum_{j\in Z}2^{kn}\int f(y)\overline{\tilde{\varphi}(2^k y-j)}\mathrm{d}y\varphi(2^k x-j).$$

假设 $\{T_k\}_{k\in Z}$ 满足下列性质：

(A2) 存在 $\alpha>0$，使得 $T_kP=P, P\in\mathscr{P}_{[\alpha]}, k\in Z$；

(A3) $\forall\, k,v\in Z$ 且 $k\geqslant v$ 时，$T_kT_v=T_v$；

(A4) $\varphi\in C^{[\alpha]+1}$；

(A5) $\{\varphi(\cdot-j):j\in Z^n$ 且 $\varphi(\cdot-j)$ 于 $[0,1]^n$ 上不恒为零 $\}$ 于 $[0,1]^n$ 上线性无关.

此时易知仅依赖于 p,q 和 φ 的常数，使得 $\forall\, Q\in D_k, k\in Z$，和任意序列 $\{a_j\}_{j\in Z^n}$，有

$$2^{kn/p}\|\sum_{j\in\Lambda(Q)}a_j\varphi(2^k\cdot-j)\|_{L^p(Q)}\approx 2^{kn/q}\|\sum_{j\in\Lambda(Q)}a_j\varphi(2^k\cdot-j)\|_{L^q(Q)}$$

$$\approx\|a_j\|_{L^q(\Lambda(Q))},\qquad(1)$$

其中 $\Lambda(Q)=\{j\in z^n|\exists\ x\in Q,\varphi(2^kx-j)\neq 0\}$.

定义 1[4] 称 $[0,\infty]$ 上的非负递增凸函数 φ 为 Young 函数，若 $\varphi(0)=0,\varphi(\infty)=\infty$ 且不恒为 0 或 ∞，在点 $t>0$ 跳至 ∞ 时，φ 左连续.

若 φ 是 Young 函数，则 $\varphi^*(s)=\sup\limits_{t\geqslant 0}(st-\varphi(t))$ 也为 Young 函数且 $\varphi^{**}=\varphi$. 每个 Young 函数满足 $\nabla_r^\cdot$ 条件：$\forall\, r\in(0,1)$，存在 $a>1$ 使得 $\varphi(at)\geqslant 2a^r\varphi(t), t\geqslant 0$. 设 φ 是 $[0,\infty]$ 上的非负递增函数，记 $N_\varphi(f)=\int_{R^n}\varphi(|f(x)|)\mathrm{d}x$.

定义 2[4] 设 φ 是 Young 函数，定义 Orlicz 空间 $L_\varphi(R^n)=\{f\in\mathscr{M}:\exists\ \lambda>0, N_\varphi(\lambda f)<\infty\}$，且 $\|f\|_{L_\varphi}=\inf\limits_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}[N_\varphi(\lambda f)+1]$. 则 $L_\varphi(R^n)$ 是 Banach 空间，且 $\|f\|_{L_\varphi}=\sup\{|(f,g)|:N_{\varphi^*}(g)\leqslant 1\}$ 以及 $\frac{1}{2}\|f\|_{L_\varphi}\leqslant\sup\limits_{g\in L_{\varphi^*}}|(f,g)|/\|g\|_{L_{\varphi^*}}\leqslant\|f\|_{L_\varphi}, f\in L_\varphi$.

引理[4] 设 T 是 $(L^\infty(R^n),L^\infty(R^n))$ 型和弱 (p,p) 型的拟线性算子，$0<p<\infty$. 若 φ 满足 $\nabla_p^\cdot$ 条件，则 $N_\varphi(Tf)\lesssim N_\varphi(cf)$. 特别地，若 φ 是 Young 函数且满足满足 $\nabla_p^\cdot$ 条件，则 T 在 $L_\varphi(R^n)$ 上有界.

3 空间 $C^\alpha_\varphi(R^n)$ 的刻画

引理 2 设 $\alpha>0, T=\{T_k\}_{k\in Z}$ 为满足(A1－A4)的线性算子序列. Young 函数 φ 满足：$\forall\, t>0,\varphi(t)\neq 0$. 若 $f\in L_\varphi(R^n)\cap L^1_{loc}(R^n)$，则

$$f^T_\alpha(x)\approx f^\#_\alpha(x),$$

其中 $f^\#_\alpha(x)=f^\#_{\alpha,1}(x)$.

证明 设 $x\in Q\in\mathscr{I}^k, k\in Z, P\in\mathscr{P}_{[\alpha]}$，则 $Q\subset x+[-\sqrt{n},\sqrt{n}]^n/2^k$ 且

$$\int_Q|f(y)-T_kf(y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_Q|f(y)-P(y)|\mathrm{d}y+\int_Q|T_k(f-P)(y)|\mathrm{d}y.\qquad(2)$$

记 $Q_L^k(x)$ 为以 x 为中心，以 $(4L+2\sqrt{n})/2^k$ 为边长的方体. 因为

$$\mathrm{Supp}\varphi(2^k\cdot-j)\subset([-L,L]+j)/2^k,$$

所以 $\forall\ z\in Q$,

$$|T_k(f-P)(z)|=\Big|\sum_{(j,2^kz-j\in[-L,L]^n)}2^{kn}\int(f(y)-P(y))\overline{\varphi(2^ky-j)}\mathrm{d}y\varphi(2^kZ-j)\Big|$$

$$\lesssim\frac{1}{|Q_L^k(x)|}\int_{Q_L^k(x)}|f(y)-P(y)|\mathrm{d}y. \tag{3}$$

由(2)和(3)易得 $f_\alpha^T(x)\lesssim f_\alpha^\#(x)$. 另一方面，由于 $\inf\limits_{s>0}\frac{\varphi^*(s)}{s}=\sup\limits_{t\geqslant0}\inf\limits_{s>0}(t-\frac{\varphi(t)}{s})=0$，所以当 $x\in Q\in\mathscr{I}^k,k\in Z$ 时

$$|T_kf(x)|\lesssim\frac{1}{|Q_L^k(x)|}\int_{Q_L^k(x)}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\|f\|_{L_\varphi}(\inf_{\lambda>0}\frac{\varphi^*(\lambda)}{\lambda}+|Q_L^k(x)|^{-1}).$$

因而 $\lim\limits_{k\to-\infty}T_kf(x)=0$，故 $T_kf(x)=\sum\limits_{v\leqslant k}(T_vf(x)-T_{v-1}f(x))$.

由(A4)，当 $|\beta|\leqslant[\alpha]+1$ 时，

$$|D^\beta(T_rf)(x)|\lesssim\frac{2^{k|\beta|}}{|Q_L^k(x)|}\int_{Q_L^k(x)}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\lesssim|Q_L^k(x)|^{-1-|\beta|/n}\int_{Q_L^k(x)}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\|f\|_{L_\varphi}(\inf_{\lambda>0}\frac{\varphi^*(\lambda)}{\lambda|Q_L^k(x)|^{|\beta|/n}}+|Q_L^k(x)|^{-1-|\beta|/n}).$$

因此，$|D^\beta(T_rf)(x)|\to0,k\to-\infty$，故

$$D^\beta(T_kf)(x)=\sum_{v\leqslant k}D^\beta(T_vf-T_{v-1}f)(x). \tag{4}$$

利用(A3)有

$$|D^\beta(T_vf-T_{v-1}f)(x)|\lesssim\frac{2^{v|\beta|}}{|Q_L^v(x)|}\int_{Q_L^v(x)}|f(y)-T_{v-1}f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\lesssim2^{v([\alpha]+1-\alpha)}f_\alpha^T(x).$$

设 $\omega\in Q,|\beta|=[\alpha]+1$，由(1)及类似于(3)的讨论，

$$|D^\beta(T_kf)(\omega)|\leqslant\sum_{v\leqslant k}|D^\beta(T_vf-T_{v-1}f)(\omega)|$$

$$\lesssim\sum_{v\leqslant k}2^{v([\alpha]+1-\alpha)}f_\alpha^T(x)\lesssim|Q|^{(\alpha-[\alpha]-1)/n}f_\alpha^T(x). \tag{5}$$

令 $P_Q(y)=\sum\limits_{|\beta|\leqslant[\alpha]}(\frac{[\alpha]}{|\beta|})D^\beta(T_kf)(x)(y-x)^\beta$，则 $\forall\ y\in Q$，由(5)有

$$|T_kf(y)-P_Q(y)|\lesssim|Q|^{([\alpha]+1)/n}\sup_{w\in Q}\sum_{|\beta|=[\alpha]+1}|D^\beta(T_kf)(w)|\lesssim|Q|^{\alpha/n}f_\alpha^T(x),$$

这蕴含了 $\int_Q|f(y)-P_Q(y)|\mathrm{d}y\lesssim\int_Q|f(y)-T_{kQ}f(y)|\mathrm{d}y+|Q|^{1+\alpha/n}f_\alpha^T(x)$，因此，$f_\alpha^\#(x)\lesssim f_\alpha^T(x)$，证毕.

定义 3 设 φ 是 Young 函数，$\alpha>0,1\geqslant r>0$，定义 $C_{\varphi,r}^\alpha(R^n)=\{f\in L_\varphi(R^n):\|f_{\alpha,r}^\#\|_{L_\varphi}<\infty\}$，并记 $C_{\varphi,1}^\alpha(R^n)=C_\varphi^\alpha(R^n)$.

定理 1 设 Young 函数 φ 满足 ∇_1^* 且 $t>0$ 时，$\varphi(t)\neq 0$. $0<q\leqslant\infty$，存在 $\alpha>0$，$T=\{T_k\}_{k\in Z}$ 满足(A1 − A5). 若 $f\in C_\varphi^\alpha\cap L_{loc}^1$，则以下条件等价：

(i) $N_1(f)=\|f\|_{C_\varphi^\alpha}$, (ii) $N_2(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|f_\alpha^T\|_{L_\varphi}$.

(iii) $N_3(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|\sup\limits_{k\in Z}2^{k\alpha}|f-T_kf|\|_{L_\varphi}$.

(iv) $N_4(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|\sup\limits_{k\in Z}2^{k\alpha}|T_kf-T_{k-1}f|\|_{L_\varphi}$.

(v) $N_5(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|\sup\limits_{x\in Q}2^{k_Q\alpha}\|T_{k_Q}f-T_{k_Q-1}f\|_{L^\infty(Q)}\|_{L_\varphi}$.

(vi) $N_6(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|\sup\limits_{x\in Q}2^{k_Q(\alpha+n/q)}\|T_{k_Q}f-T_{k_Q-1}f\|_{L^q(Q)}\|_{L_\varphi}$.

证明 (a) $N_1(f)\approx N_2(f)$ 从引理 2 可得. (b) $N_2(f)\lesssim N_3(f)$. $\forall\, x\in R^n$

$$\begin{aligned}f_\alpha^T(x)&=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|^{1+\alpha/n}}\int_Q|f(y)-T_{k_Q}f(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant\sup_{x\in Q}\frac{2^\alpha}{|Q|}\int_Q\sup_{k\in Z}2^{k\alpha}|f(y)-T_kf(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant M(2^\alpha\sup_{k\in Z}2^{k\alpha}|f-T_kf|)(x),\end{aligned}$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大函数算子. 由引理 1 知 M 在 $L_\varphi(R^n)$上有界，故

$$\|f_\alpha^T\|_{L_\varphi}\lesssim\|M(2^\alpha\sup_{k\in Z}2^{k\alpha}|f-T_kf|)\|_{L_\varphi}\lesssim\|\sup_{k\in Z}2^{k\alpha}|f-T_kf|\|_{L_\varphi}.$$

(c) $N_3(f)\lesssim N_4(f)$. [3] 已证：若 $f\in L_{loc}^1$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty}T_kf(x)=f(x)$ a. e.

因此，$|f-T_kf|\lesssim\sum\limits_{v\geqslant k+1}|T_vf-T_{v-1}f|$ a. e. 故 $\sup\limits_{k\in Z}2^{k\alpha}|f-T_kf|\lesssim\sup\limits_{k\in Z}2^{k\alpha}|T_kf-T_{k+1}f|$.

(d) $N_4(f)\lesssim N_5(f)$ 是显然的.

(e) $N_5(f)\lesssim N_6(f)$ 证明类似于(3).

(f) 考虑 $0<q\leqslant\infty$. 由(A5) 知(1) 成立，因此，

$N_6(f)\lesssim N_4(f)\lesssim\|f\|_{L_\varphi}+\|\sup\limits_{x\in Q\in\bigcup_k D_k}2^{k_Q\alpha}\|T_{k_Q}f-T_{k_Q-1}f\|_{L^\infty(Q)}\|_{L_\varphi}\lesssim N_6(f)$.

引理 3[3] 设 $0<s<r$ 且 $f\in L_{loc}^s(R^n)$. 则 $f_{\alpha,r}^\#\lesssim M_\sigma(f_{\alpha,s}^\#)(x)$，其中 $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{n}$，$M_\sigma(g)=(M(|g|^\sigma))^{1/\sigma}$.

定理 2 设 φ 是$[0,\infty]$上的非负递增函数且满足 ∇_σ^* 条件，$\frac{1}{\sigma}=1+\frac{\alpha}{n}$，$\alpha>0$. 则对任意 $0<l\leqslant q\leqslant 1$ 和 $f\in L_{loc}^1(R^n)$，存在 $C>0$，使得

$$N_\varphi(f_{\alpha,l}^\#)\lesssim N_\varphi(f_{\alpha,q}^\#)\lesssim N_\varphi(Cf_{\alpha,l}^\#).\tag{6}$$

特别地，若 φ 是 Young 函数，则 $\|f_{\alpha,l}^\#\|_{L_\varphi}\approx\|f_{\alpha,q}^\#\|_{L_\varphi}$.

证明 由 Hölder 不等式知 $f_{\alpha,l}^\#\leqslant f_{\alpha,q}^\#$；另一方面，由引理 3 有

$$f_{\alpha,q}^\#(x)\leqslant f_\alpha^\#(x)\lesssim M_\sigma(f_{\alpha,l}^\#)(x).$$

由于 M_σ 是弱(σ,σ) 型和(∞,∞) 型的拟线性算子，且 φ 满足 $\nabla_\sigma^\#$，由引理 1 知(6) 成立. 又 Young 函数必满足 $\nabla_\sigma^\#$ 条件，$0<\sigma<1$，故由引理 2 和引理 1 得后一结论.

引理 4[3] 设 $0<s<r$，$f\in L_{loc}^s\cap L_{loc}^1$. 则

$$f_{\alpha,r}^T(x)\lesssim M_\sigma(f_{\alpha,s}^T)(x),$$

其中 $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{n}$.

利用引理 4,类似于定理 2 的证明得定理 3.

定理 3 设 $0<q,l\leqslant 1,\alpha>0,\frac{1}{\sigma}=1+\frac{\alpha}{n}$,$\varphi$是$[0,\infty]$上的非负递增函数且满足 $\nabla_{\sigma}^{\#}$ 条件. 若 $T=\{T_k\}_{k\in Z}$ 满足(A1 − A5),则存在非负常数 C_1,C_2 使得 $\forall f\in L_{loc}^1,N_\varphi(C_1f_{\alpha,l}^T)\approx N_\varphi(C_2f_{\alpha,q}^T)$. 特别地,若 φ是 Young 函数,则 $\|f_{\alpha,l}^T\|_{L_\varphi}\approx\|f_{\alpha,q}^T\|_{L_\varphi}$.

定理 4 设 $0<q\leqslant\infty,0<r\leqslant 1$. Young 函数 φ满足:$t>0$ 时,$\varphi(t)\neq 0$ 且 φ不满足 $\nabla_1^{\#}$ 条件. 若 $\alpha>0,T=\{T_k\}_{k\in Z}$ 满足(A1 − A5),则当 $f\in C_{\varphi,r}^{\alpha}\cap L_{loc}^1$ 时,$N_1'(f)$ 与 $N_m(f)(m=2,3,4,5,6)$ 相互等价,其中 $N_1'(f)=\|f\|_{L_\varphi}+\|f_{\alpha,r}^{\#}\|_{L_\varphi}$,$N_m(f)$ 的定义见定理 1.

证明 由引理 2 和定理 3 可得 $N_1'(f)\approx N_2(f)$. 其余证明与定理 1 类似,此略.

致谢 衷心感谢邓东皋教授的指导和鼓励.

参考文献:

[1] DEVORE R and SHARPLEY R. *Maximal functions measuring smoothness* [J]. Mem. Amer. Math. Soc., 1984, **47**(293).

[2] TRIEBEL H. *Theory of Function Space II* [M]. Birkhauser Basel, 1992.

[3] KYRIAZIS G C. *Maximal functions and smoothness space in $L_p(R^d)$* [J]. Studia Math., 1998, **128**(3): 219−241.

[4] STROMBERG J O. *Bounded mean oscillation with orlicz norms and duality of Hardy spaces* [J]. Indiana Math. J., 1979, **28**(3): 511−544.

[5] DEVORE R and YU X. *Degree of adaptive approximation* [J]. Math. Comp., 1990, **55**: 625−635.

The Characterization of Some of Function Spaces

QIU Dao-wen

(Dept. of Comp. Sci. & Tech., Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: We give some of subspaces in Orlicz spaces and establish their equivalent characterization theorems with approximation by a standard operator sequences.

Key words: sharp maximal function; approximation by operators; Orlicz spaces; smoothness spaces.