第21卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 3
2001年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2001

Baskakov-Durrmeyer 算子的点态逼近*

郭顺生，　宋占杰
（河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016）

摘　要：本文应用 Ditzian-Totik 模得到 Baskakov-Durrmeyer 算子线性组合的点态逼近的等价定理.

关键词：Baskakov-Durrmeyer 算子；点态逼近；光滑模.
分类号：AMS(1991) 41A35/CLC O174.41
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0441-06

1 引　言

Baskakov-Durrmeyer 算子定义为

$$L_n(f.x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{nk}(x)(n-1)\int_0^{\infty}p_{nk}(t)f(t)\mathrm{d}t,\tag{1.1}$$

其中 $p_{nk}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}$，其线性组合被定义为

$$L_{n,r}(f,x)=\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)L_{n_i}(f,x),\tag{1.2}$$

其中 $c_i(n)$ 满足

$$\begin{aligned}&(a)\ n=n_0<n_1<\cdots<n_{r-1}\leqslant An;\\&(b)\ \sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\leqslant A;\\&(c)\ \sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)=1;\\&(d)\ \sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)n_i^{-k}=0,k=1,2,\cdots,r-1.\end{aligned}\tag{1.3}$$

对算子(1.1)和(1.2)文[1]得到如下结果：

定理 A　设 $f\in C_B[0,\infty)$，有

$$|L_{n,r}(f,x)-f(x)|\leqslant M\omega_r\Big(f,\Big(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big),\tag{1.4}$$

* 收稿日期：1998-11-16
基金项目：河北省自然科学基金资助项目(197147)
作者简介：郭顺生(1939-)，男，教授，博导.

其中 $\varphi^2(x)=x(1+x)$，$\omega_r(f,t)$ 为 r 阶古典光滑模.

定理 B 设 $f\in C_B[0,\infty)$，$r\in N$，$0<\alpha<r$，则有

$$|L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant M(\min(n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)})^{\frac{r-\alpha}{2}})\Leftrightarrow\omega_r(f,h)=O(h^\alpha). \tag{1.5}$$

Ditzian[3]引入 $\omega_{\varphi\lambda}^2(f,t)$，并应用它得到 Bernstein 算子的正定理，从而统一了古典光滑模和 Ditzian-Totik 模的结果，我们在[4][5]也研究了类似的问题. 本文目的是用 $\omega_{\varphi\lambda}^r(f,t)$ 研究算子(1.1)和(1.2)逼近等价定理，得到一般的结果. 宜[1]的结果，(1.4)和(1.5)是本文中 $\lambda=0$ 的特例. 为叙述本文结果，需引入一些记号，首先 $C_B[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上有界连续函数全体，另外，

$$\omega_{\varphi\lambda}^r(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\sup_{x\pm rh\varphi^\lambda(x)\in[0,\infty)}|\Delta_{h\varphi^\lambda(x)}^r f(x)|,$$

$$K_{\varphi\lambda}(f,t^r)=\inf_g\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^\lambda g^{(r)}\|\},$$

$$\overline{K}_{\varphi\lambda}(f,t^r)=\inf_g\{\|f-g\|+t^r\|\varphi^\lambda g^{(r)}\|+t^{r/(1-\frac{\lambda}{2})}\|g^{(r)}\|\},$$

其中下确界取自 $\{g:g^{(r-1)}\in A\cdot C_{loc}\}$，$\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\Delta_h^1 f(x)=f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})$，$\Delta_h^r f(x)=\Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}f(x))$.

由[2]知：

$$\omega_{\varphi\lambda}^r(f,x)\sim K_{\varphi\lambda}(f,t^r)\sim\overline{K}_{\varphi\lambda}(f,t^r) \tag{1.6}$$

($x\sim y$ 含义为存在 $c>0$，使 $c^{-1}y\leqslant x\leqslant cy$.)

本文所得结果如下：

若 $f\in C_B[0,\infty)$，$r\in N$，$0<\alpha<r$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则下列各式是等价的

$$|L_{n,r}(f,x)-f(x)|=O(n^{-1/2}\delta_n^{1-\lambda}(x)^\alpha); \tag{1.7}$$

$$\omega_{\varphi\lambda}^r(f,t)=O(t^\alpha); \tag{1.8}$$

$$\varphi^\lambda(x)|L_n^{(r)}(f,x)|=O((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha-r}), \tag{1.9}$$

其中 $\delta_n(x)=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\max\{\varphi(x),\frac{1}{\sqrt{n}}\}$.

本文中 C 表示不依赖于 n 和 x 的正常数，不同地方可能代表不同值.

2 正定理

引理 1 若 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$u$ 介 t 和 x 之间，有

$$\left|\int_x^t\varphi^{-\lambda}(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant|t-x|x^{-\lambda/2}((1+t)^{-\lambda/2}+(1+x)^{-\lambda/2}); \tag{2.1}$$

当 $r\geqslant2$ 时，有

$$\frac{|t-u|^{r-1}}{\varphi^\lambda(u)}\leqslant\frac{|t-x|^{r-1}}{\varphi^{(r-2)\lambda}(x)x^\lambda}((1+t)^{-\lambda}+(1+x)^{-\lambda}). \tag{2.2}$$

证明 直接计算可得(2.1)，类似于[2](9.6.2)的证法可得(2.2).

引理 2 若 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，则有

$$L_n(|\int_x^t \frac{|t-u|^{r-1}}{\varphi^{\lambda}(u)}\mathrm{d}u|,x) \leqslant Cn^{-r/2}\delta_n^r(x)\varphi^{-r\lambda}(x). \tag{2.3}$$

证明 首先由[6]推论 4.9 知

$$L_n((t-x)^{2r},x) \leqslant Cn^{-r}\delta_n^{2r}(x). \tag{2.4}$$

当 $r=1$ 时，由(2.1)及(2.4)知

$$\begin{aligned} L_n(|\int_x^t \varphi^{-\lambda}(u)\mathrm{d}u|,x) &\leqslant x^{-\lambda/2}L_n(|t-x|(1+t)^{-\lambda/2},x) + \\ & x^{-\lambda/2}(1+x)^{-\lambda/2}L_n(|t-x|,x) \\ &\leqslant x^{-\lambda/2}(L_n((t-x)^2,x))^{1/2}(L_n((1+t)^{-1},x))^{\lambda/2} + C\lambda^{-\lambda/2}(1+x)^{-\lambda/2}n^{-\frac{1}{2}}\delta_n(x). \end{aligned}$$

由[2](9.6.3)知

$$L_n(1+t)^{-1},x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x)\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+k} \leqslant C(1+x)^{-1}.$$

故可知 $r=1$ 时(2.3)成立.

当 $r\geqslant 2$ 时，由(2.2)，(2.4)，[2](9.6.3)及 Hölder 不等式，用类似于上面的方法可证得(2.3).

定理 1 $f\in C_B[0,\infty]$，$r\in N$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 有

$$|L_{n,r}(f,x)-f(x)| \leqslant C\omega_{\varphi\lambda}^r(f,\frac{\delta_n^{1-\lambda}(x)}{\sqrt{n}}). \tag{2.5}$$

证明 由 K-泛函 $\overline{K}_{\varphi\lambda}(f,t^r)$ 的定义及(1.6)知，对固定的 x 及 λ，我们可选 $g_n=g_{n,x,\lambda}$ 使得

$$\| f-g_n \| \leqslant C\omega_{\varphi\lambda}^r(f \cdot n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)), \tag{2.6}$$

$$n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)\,\| \varphi^{r\lambda}g_n^{(r)} \| \leqslant C\omega_{\varphi\lambda}^r(f,n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)), \tag{2.7}$$

$$(n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)^{r/(1-\frac{\lambda}{2})}\,\| g_n^{(r)} \| \leqslant C\omega_{\varphi\lambda}^r(f,n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)). \tag{2.8}$$

另外(见[1])，$L_{n,r}((\cdot-x)^k,x)=0$，$k=1,2,\cdots,r-1$，于是

$$\begin{aligned} |L_{n,r}(g_n,x)-g_n(x)| &\leqslant |L_{n,r}(\frac{1}{(r-1)!}\int_x^t (t-u)^{r-1}g_n^{(r)}(u)\mathrm{d}u,x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{r-1}|C_i(n)|L_{n_i}((|\int_x^t \frac{|t-u|^{r-1}}{\delta_n^{r\lambda}(u)}\mathrm{d}u|,x)\,\| \delta_n^{r\lambda}g_n^{(r)} \|. \end{aligned}$$

由 $\delta_n(x)\sim\max\{\varphi(x),\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 及引理 2 知

$$\begin{aligned} L_{n_i}(|\int_x^t \frac{|t-u|^{r-1}}{\delta_n^{r\lambda}(u)}\mathrm{d}u|,x) \leqslant \min\{ & L_{n_i}(|\int_x^t \frac{|t-u|^{r-1}}{\varphi^{r\lambda}(u)}\mathrm{d}u|,x), \\ & L_{n_i}((\frac{1}{\sqrt{n}})^{-\lambda r}|t-x|^r,x)\} \leqslant Cn^{-\frac{r}{2}}\delta_n^r(x)\delta_n^{-r\lambda}(x). \end{aligned}$$

故有

$$|L_{n,r}(g_n,x)-g_n(x)| \leqslant Cn^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)\,\| \delta_n^{r\lambda}g_n^{(r)} \|. \tag{2.9}$$

类似的，用引理 2 可得

$$|L_{n,r}(g_n,x)-g_n(x)| \leqslant Cn^{-\frac{r}{2}}\delta_n^r(x)\varphi^{-r\lambda}(x)\,\| \varphi^{r\lambda}g_n^{(r)} \|. \tag{2.10}$$

这样，对 $f\in C_B[0,\infty)$，当 $x\in E_n=[\frac{1}{n},\infty)$，则 $\delta_n(x)\sim\varphi(x)$，据(2.6)(2.7)及(2.10)有

$$\begin{aligned}|L_{n,r}(f,x)-f(x)|&\leqslant C(\|f-g_n\|+n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^r(x)\varphi^{-r\lambda}(x)\|\varphi^{r\lambda}g_n^{(r)}\|)\\&\leqslant C(\|f-g_n\|+n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{r\lambda}g_n^{(r)}\|)\\&\leqslant C\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)).\end{aligned}\tag{2.11}$$

当 $x\in E_n^c=[0,\frac{1}{n})$，则 $\delta_n(x)\sim1/\sqrt{n}$，据(2.6)－(2.8)及(2.9)有

$$\begin{aligned}|L_{n,r}(f,x)-f(x)|&\leqslant C(\|f-g_n\|+n^{-r/2}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)\|\delta_n^{r\lambda}g_n^{(r)}\|)\\&\leqslant C(\|f-g_n\|+n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)(\|\varphi^{r\lambda}g_n^{(r)}\|+n^{-r\lambda/2}\|g_n^{(r)}\|))\\&\leqslant C(\|f-g_n\|+n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{r(1-\lambda)}(x)\|\varphi^{r\lambda}g_n^{(r)}\|+\\&\qquad(n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{r/(1-\lambda/2)}\|g_n^{(r)}\|)\\&\leqslant C\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)).\end{aligned}\tag{2.12}$$

由(2.11)及(2.12)可得(2.5).

注 当 $\lambda=0$，此即(1.4).

3 逆定理

定理 2 若 $f\in C_B[0,\infty)$，$r\in N$，$0<\alpha<r$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则

$$|L_{n,r}(f,x)-f(x)|\leqslant C(n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^\alpha\tag{3.1}$$

蕴含

$$\omega_{\varphi^\lambda}^r(f,t)=O(t^\alpha).\tag{3.2}$$

为证定理 2 需要以下两个引理：

引理 3 设 $r\in N$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则

$$|\varphi^{r\lambda}(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant Cn^{\frac{r}{2}}\delta_n^{r(\lambda-1)}(x)\|f\|;\tag{3.3}$$

$$|\varphi^{r\lambda}(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant C\|\varphi^{r\lambda}f^{(r)}\|.\tag{3.4}$$

证明 由[6]知，有 $|\varphi^r(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant Cn^{\frac{r}{2}}\|f\|$. 故当 $x\in E_n$ 时，$\delta_n(x)\sim\varphi(x)$ 有

$$|\varphi^{r\lambda}(x)L_n^{(r)}(f,x)|=\varphi^{r(\lambda-1)}(x)|\varphi^r(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant Cn^{r/2}\delta_n^{r(\lambda-1)}(x)\|f\|.$$

当 $x\in E_n^c$ 时，$\|\varphi^{r\lambda}(x)\|_{E_n^c}\sim n^{-\frac{r}{2}\lambda}$，由[6](4.1)的证明易知

$$|\varphi^{r\lambda}(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant Cn^{-\frac{r}{2}\lambda}\|f\|\leqslant Cn^{r/2}\delta_n^{r(\lambda-1)}(x)\|f\|.$$

于是(3.3)得证. 下证(3.4)由[6](3.10)及分部积分知

$$|L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant C(n-1)\sum_{k=0}^\infty p_{n+r,k}(x)\int_0^\infty p_{n-r,k+r}(t)|f^{(r)}(t)|\mathrm{d}t.$$

故由 Hölder 不等式知

$$|\varphi^{r\lambda}(x)L_n^{(r)}(f,x)|\leqslant C\|\varphi^{r\lambda}f^{(r)}\|\frac{n-1}{n-r}(\sum_{k=0}^\infty p_{n+r,k}(x)\varphi^r(x)(n-r)\int_0^\infty p_{n-r,k+r}(t)\varphi^{-r}(t)\mathrm{d}t)^\lambda$$

$$\leqslant C\|\varphi^{\lambda}f^{(r)}\|.$$

(3.4)得证.

引理 4 对 $0<t<\frac{1}{8r}, x>\frac{rt}{2}, 0\leqslant\beta\leqslant r$,则有

$$\int\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-\beta}(x+u_1+\cdots+u_r)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\leqslant Ct^r\varphi^{-\beta}(x). \tag{3.5}$$

证明 先证下式

$$\int\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+u_1+\cdots+u_r)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r\leqslant Ct^r\varphi^{-r}(x). \tag{3.6}$$

当 $rt\leqslant x$ 时,有

$$(3.6)\text{式左端}\leqslant t^r((x-\frac{rt}{2})(1+x-\frac{rt}{2}))^{-r/2}\leqslant 4^r t^r\varphi^{-r}(x).$$

当 $\frac{rt}{2}<x<rt$ 时,有 $x\sim t$,则由[4]可知

$$(3.6)\text{式左端}\leqslant\int\cdots\int_{-t/2}^{t/2}(x+u_1+\cdots+u_r)^{-r/2}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r$$

$$\leqslant Ct^r x^{-\frac{r}{2}}\leqslant Ct^r x^{-\frac{r}{2}}(\frac{1+rt}{1+x})^{r/2}\leqslant Ct^r\varphi^{-r}(x).$$

于是(3.6)成立,由此根据 Hölder 不等式易证(3.5)成立.

定理 2 的证明 对任一 $n>r$,若(3.1)成立,则对 $x>\frac{rt}{2}\varphi^{\lambda}(x)$有

$$|\Delta_{t\varphi^{\lambda}(x)}^{r}f(x)|\leqslant|\Delta_{t\varphi^{\lambda}(x)}^{r}(L_{nr}(f,x)-f(x))|+|\Delta_{t\varphi^{\lambda}(x)}^{r}L_{n,r}(f,x)|$$

$$\leqslant C(n^{-\frac{r}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)^{\alpha}+$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\int\cdots\int_{-\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}^{\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}|L_{n_i}^{(r)}(f,x+\sum_{j=1}^{r}u_j)|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r$$

$$\leqslant C(n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha}+$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\int\cdots\int_{-\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}^{\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}|L_{n_i}^{(r)}(f-g,x+\sum_{j=1}^{r}u_j)|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r+$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\int\cdots\int_{\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}^{\frac{t}{2}\varphi^{\lambda}(x)}|L_{n_i}^{(r)}(g,x+\sum_{j=1}^{r}u_j)|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_r$$

$$:=C(n^{-\frac{1}{2}}\delta_{1-\lambda_n}(x))^{\alpha}+J_1+J_2 \tag{3.7}$$

由引理 3 及引理 4,易得

$$J_1\leqslant Ct^r n^{\frac{r}{2}}\delta_n^{r(\lambda-1)}(x)\|f-g\|; \tag{3.8}$$

$$J_2\leqslant Ct^r\|\varphi^{\lambda}g^{(2r)}\|. \tag{3.9}$$

结合(3.7)—(3.9),对于适当选择的函数 g,我们有

$$|\Delta_{t\varphi^{\lambda}(x)}^{r}f(x)|\leqslant C((n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{\alpha}+t^r(n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))^{-r}\omega_{\varphi^{\lambda}}^{r}(f,n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x))).$$

对每一固定的 $h, 0\leqslant h\leqslant\frac{1}{8r}$,以及对每一 $x(x\geqslant\frac{rt}{2})$我们可以选 n 使得 $n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)\leqslant h<2n^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{1-\lambda}(x)$,则有

$$|\Delta^r_{t\varphi^\lambda(x)} f(x)| \leqslant C(h^\alpha + (\frac{t}{h})^r \omega^r_{\varphi^\lambda}(f,h)),$$

故有 $\omega^r_{\varphi^\lambda}(f,t) \leqslant C(h^\alpha + (\frac{t}{h})^r \omega^r_{\varphi^\lambda}(f,h))$.

由 Berens-Lorentz 引理可推出(3.2)成立.

注 由定理 1 及定理 2 可知(1.7)⇔(1.8). 关于(1.8)⇔(1.9),可以应用引理 3 及完全类似于[5]的方法推出,这里不再详述. 当 $\lambda=0$ 时,此即(1.5).

参考文献:

[1] 宣培才. 关于 Baskakov-Durrmeyer 算子的一致逼近 [J]. 数学研究与评论, 1996, **16**(4): 599—664.
XUAN Pei-cai. *On uniform approximation by Baskakov-Durrmeyer operators* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1996, **16**(4): 599—664 (in Chinese)

[2] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness* [M]. Springer-Verlag, New York, 1987.

[3] DITZIAN Z. *Direct estimation for Bernstein polynomials* [J]. J. Approx. Theory, 1994, **79**: 165-186.

[4] 郭顺生,齐秋兰. *Saasz* 型算子同时逼近的点态估计 [J]. 应用数学学报,1998, **21**(3): 363—370.
GUO Shun-sheng, QI Qiu-lan. *Pointwise estmats for Szasz-type operators* [J]. Acta. Math. Appl. Sinica, 1998, **21**(3): 363—370. (in Chinese)

[5] GUO Shun-sheng, et al. *Pointwise estimate for Szasz-type operators* [J]. J. Approx. Theory, 1998, **94**: 160—171.

[6] HEILMAN M. *Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type* [J]. Approx. Theory and Appl., 1989, **5**(1): 105—127.

[7] DITZIAN Z, IVANOV K G. *Bernstein-type operators and their derivatives* [J]. J. Approx. Theory, 1989, **56**: 72—90.

Pointwise Approximation by Baskakov-Durrmeyer Operator

GUO Shun-sheng, SONG Zhan-jie

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: The purpose of this paper is to get the results of pointwise approximation equivalent theorem with Ditzian-Totik modulus for the combinations of Baskakov-Durrmeyer operators.

Key words: Baskakov-Durrmeyer operators; Pointwise approximation; modulus of smoothness.