第21卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 3
2001年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2001

素GPI-环的幂零多项式*

游 松 发

(湖北大学研究生处，湖北 武汉 430062)

摘　要：R是素GPI-环，若多项式$f(x_1,\cdots,x_d)$在R上是幂零的，则或$f(x_1\cdots,x_d)$是R的恒等式，或R是有限域上的有限矩阵环.

关键词：GPI-环；幂零；广义形心；基层；恒等式.

分类号：AMS(1991) 16R50/CLC O153.3

文献标识码：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0452-03

1　预备知识

令R是一个素环，$\mathcal{D}=\{I|I\lhd R\}$是$R$的所有非零理想的集合，$F=\{f|f:I_R\to R_R$是所有右$R-$模同态，$I\in\mathcal{D}\}$. 称$f_1$(作用在$R$的理想$I_1$上)与$f_2$(作用在$R$的理想$I_2$上)是等价的. 若存在某$I'\in\mathcal{D}$使得$f_1|_{I'}=f_2|_{I'}$，其中$I'\subseteq I_1\cap I_2$. 由此我们可定义$F$上的一个等价关系，其所有等价类的集合用$Q$表示.

若$\bar{f}_1,\bar{f}_2\in Q$，定义$\bar{f}_1+\bar{f}_2$是由f_1+f_2作用在$I_1\cap I_2$上所确定的类，$\bar{f}_1\cdot\bar{f}_2$是由$f_1(f_2)$作用在I_2I_1上所确定的类，易知$(Q,+,\cdot)$构成一个环.

性质1.1　若R是素环，则R可看作环Q的子环.

证明　定义映射$g:R\to Q,(a\to a_L)$，其中a_L是R的左乘变换，即$a_L:R\to R,(r\to ar)$，由R的素性可知g是单的，从而R可同构嵌入到Q中.

性质1.2　若R是素环，则$\forall\, q\in Q$，必存在$0\neq I\lhd R$，使得$qI\subseteq R$.

证明　由性质1.1，I中元可看作Q中元，据Q中定义的乘法和Q中元的定义$q\cdot I=q(I)\subseteq R$.

性质1.3　若R是素环，则Q是素环.

证明　若Q不是素环，必存在$0\neq q_i\in Q(i=1,2$，下同)，使得$q_1Qq_2=0$，据性质1.2，对q_i必存在$0\neq I_i\lhd R$，使得$q_iI_i\subseteq R$，又$q_i\neq 0$，故必存在$x_i\subseteq I_i$，使得$q_ix_i\neq 0$，而$(q_1x_1)R(q_2x_2)\subseteq(q_1Qq_2)x_2=0$，此与$R$是素环相矛盾，故$Q$是素环.

性质1.4　若R是素环，则环Q的中心$C=Z(Q)$是域.

* 收稿日期：1998-06-15
作者简介：游松发(1966-)，男，湖北武穴市人，湖北大学讲师.
E-mail：yjsc@dns.hubu.edu.cn

证明 因 Q 是素环,因而 $C=Z(Q)$ 在 Q 中没有零因子,令 $0\neq c\in C\subseteq Q$,据性质 1.2,存在 $0\neq I\lhd R$,使得 $cI\subseteq R$,因 C 与 Q 中元可换,从而与 R 中元可换,因而 cI 是 R 的(双边)理想,令 $d\in Q$,$d:cI\to R(cx\to x,x\in I)$,则 $d(cx)=x$,据 Q 中乘法定义 $dcx=x$,从而 $(dc-1)x=0$,据 Q 的素性 $dc-1=0$,$dc=1$,即 $C=Z(Q)$ 是域.

下面令 $S=RC$,其中 $C=Z(Q)$,由上述性质可知 S 是包含 R 的 Q 的子环($Q\supseteq S\supseteq R$),称 C 是 R 的广义形心.S 是 R 的中心闭包(或广义形心扩张),若 $1\in R$,则 $C=Z(S)$.当 R 是素环时,$C=Z(Q)$ 是域且 S 亦是素环.[1] 曾证明:

引理 1.5 令 R 是素环,$S=RC$ 是 R 的中心闭包,则 S 是 GPI- 环(C 上),当且仅当 S 包含一个最小右理想 eS(因此 S 是本原的)且 eSe 是 C 上的有限维可除代数.

2 问题的提出

若 R 是具有广义形心 C 的素环.令 $f(x_1\cdots x_d)$ 是系数为广义形心 C 中元的非交换变元 $x_1,\cdots,x_d$ 的多项式.若 $\forall\, r_1,\cdots,r_d\in R$,使得 $f(r_1,\cdots,r_d)=0$,则 f 称作 R 的恒等式.若 $\forall\, r_1,\cdots,r_d\in R$,存在依赖于 $r_1,\cdots,r_d$ 的整数 $n=n(r_1,\cdots,r_d)\geqslant 1$,使得 $f(r_1,\cdots,r_d)^n=0$,则称 f 在 R 上是幂零的.我们知道,R 的恒等式在 R 上是幂零的,反之,若多项式 f 在 R 上是幂零的,那么 f 是 R 的恒等式吗?本文就此问题作了一些探讨.

3 引　理

引理 3.1 若 R 是素 GPI- 环,C 是 R 的广义形心.若 $S=RC$ 的幂等元在它的基层中(所有最小左理想和右理想的和[2]),则 $R\cap eSe$ 是素环,且 $eSe=(R\cap eSe)C$.

证明 先证明 $R\cap eSe$ 是素环.选取 R 的非零理想 I,使得 $eI,Ie\subseteq R$(性质 1.2),则 $eI^2e\subseteq R\cap eSe$ $(I\subseteq R\subseteq S)$.$\forall\, a,b\in R\cap eSe$.若 $a(R\cap eSe)b=0$,则

$$0=a(R\cap eSe)b\geqslant a(eI^2e)b=(ae)I^2(eb)=aI^2b\quad(\text{注}:ae=a,eb=b)$$

由 R 是素环可知 I 是素环,从而 $a=0$ 或 $b=0$,即 $R\cap eSe$ 是素环.

下面证明 eSe 是 $R\cap eSe$ 的 Martindale 商环.$\forall\, a\in eSe$,令 $0\neq J$ 是 R 的理想且满足 $eJ,Je,aJ,Ja\subseteq R$,证明 $0\neq eJ^3e$ 是 $R\cap eSe$ 的理想.事实上,$\forall\, x\in R\cap eSe$,我们有 $xeJ^3=exJ^3e\subseteq eRJ^3e\subseteq eJ^3e$.类似地,$eJ^3ex\subseteq eJ^3e$.注意到 $aeJ^3e=eaJ^3e\subseteq eRJ^2e\subseteq eJ^2e\subseteq R\cap eSe$.类似地,$eJ^3ea\subseteq R\cap eSe$.因此 eSe 是 $R\cap eSe$ 的(两边)Martindale 商环.

由于 R 是素 GPI- 环,从而 S 是 GPI- 环,据引理 1.5,eSe 是 C 上有限维可除代数,因而是 PI- 环,故 $R\cap eSe$ 是素 PI- 环,其中心商环和 Martindale 商环是一致的.注意到 eSe 的中心明显是 eC,因而有 $eSe\subseteq(R\cap eSe)\cdot eC=(R\cap eSe)C$,另一边包含 $eSe\supseteq(R\cap eSe)C$ 是明显的,故 $eSe=(R\cap eSe)C$.

4 定　理

定理 4.1 令 R 是素 GPI-环，若多项式 $f(x_1,\cdots,x_d)$ 在 R 上是幂零的，则或 $f(x_1,\cdots,x_d)$ 是 R 的恒等式，或 R 是有限域上的有限矩阵环.

证明 R 是素 GPI-环，据引理 1.5，S 是本原环，且有一个非零的基层. 首先我们假设广义形心 C 是有限的，对 $\forall\ \alpha \in C$，选取 S 的非零理想 I，使得 $\alpha I \subseteq R$，IC 是 S 的非零(两边)理想. 因此 IC 包含 S 的基层，又 $IC \subseteq R$，因此 R 包含 S 的基层，从而 R 是本原的，据[3. Th1. 7]，定理获证. 另一方面，若 C 是无限的，令 $e \in S$ 是有有限秩 k 的幂等元，则 f^k 是 $R \cap eSe$ 的多项式恒等式，据[4. P52. Th2]和本文引理 3.1，$R \cap eSe$ 和它的中心商环 eSe 满足相同的多项式恒等式，故 f^k 为 eSe 的恒等式. 据[4. P90. Th2]，f 是 eSe 的恒等式，由于对足够大的有限秩幂等元 $e \in S$，S 的基层中有限多个元一定在 eSe 中，因而 f 是 S 的基层的恒等式，又 S 的基层是 S 的稠密子环，从而 f 是 S 的恒等式，因而是 R 的恒等式.

参考文献：

[1] MARTINDALE W S. *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity* [J]. J. Algebra, 1969, **12**: 576—584.

[2] 刘绍学. 环与代数 [M]. 北京：科学出版社，1983.
LIU Shao-xue. *Ring and Algebra* [M]. Beijing: Academic Press, 1983.

[3] HERSTEIN I N, PROCESI C and SCHACHER M. *Algebraic valued functions on noncommutative rings* [J]. J. Algebra, 1975, **36**: 128—150.

[4] JACOBSON N. *PI-Algebra, An Introduction* [M]. LNM 441. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1967.

[5] ZHENG Yu-mei, YOU Song-fa. *A note on radicals in hypercentral extensions of rings* [J]. SEA Bull. Math., 1993, **17**(1): 105—108.

[6] 游松发. 矩阵序列与多重线性多项式 [J]. 湖北大学学报(自然科学版)，1995，**17**(4)：381—385.
YOU Song-fa. *Matrix sequences and multilinear polynomials* [J]. J. of Hubei Univ. (Nat. Sci. Edition), 1995, **17**(4): 381—385.

Nilpotent Polynomials of Prime GPI-Rings

YOU Song-fa

(Section of Postgraduate of Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract: Assume that R is a prime GPI-ring. If a polynomial $f(x_1,\cdots,x_d)$ in the noncommuting variables $x_1,\cdots,x_d$ and with the coefficients in the extended centroid C of R is nilpotent on R, then either $f(x_1,\cdots,x_d)$ is a polynomial identity of R or R is a finite matrix ring over a finite field.

Key words: GPI-ring; nilpotent; extend centroid; socle; identity.