第21卷第3期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 3
2001年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2001

复正定矩阵的 Minkowski 不等式*

袁晖坪
(渝州大学数学系，重庆 400033)

摘　要：建立了复正定矩阵的几个行列式不等式，将正定 Hermite 阵的 Minkowski 不等式、Ostrowski-Taussky 不等式推广到了复正定矩阵上，推广改进了一些文献的结果.

关键词：复正定矩阵；行列式；不等式.
分类号：AMS(1991) 15A15,15A57/CLC O151.21
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0464-05

文[1－3]建立了复正定矩阵理论，本文在此基础上研究了复正定矩阵的行列式理论，获得了许多新的结果，将 Minkowski，Ostrowski-Taussky 等关于正定 Hermite 阵的著名行列式不等式推广到了一类非 Hermite 复矩阵(如复正定矩阵)上，并且推广了文[3－4]的结果，简捷地导出了文[2]定理 4.

定理 1　设 A 为 n 阶复正定矩阵，B 为 n 阶 Hermite 正定阵，$B^{-1}A$ 的非实特征值是 m 对共轭复数，$n \geqslant 2$，则

$$|\det(A+B)|^{1/(n-m)} > |\det A|^{1/(n-m)} + |\det B|^{1/n-m}. \tag{1}$$

证明　因 B 为 n 阶 Hermite 正定阵，所以存在 n 阶复可逆阵 Q 使 $Q^*BQ=I$，(其中 Q^* 表示 Q 的共轭转置阵，I 表示单位矩阵)，且 Q^*AQ 的非 0 特征值与 $QQ^*A=B^{-1}A$ 的非 0 特征值相同，于是由 Schur 分解定理知：存在 n 阶酉阵 U 使

$$U^*Q^*AQU=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & * \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & a_1+b_1 i & & & & & \\ & & & & a_1-b_1 i & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_m+b_m i & & \\ 0 & & & & & & & & a_m-b_m i \end{bmatrix},$$

* 收稿日期：1998-10-07
基金项目：重庆市教委基金资助课题(981002)
作者简介：袁晖坪(1957-)，男，重庆人，副教授.

其中 $i=\sqrt{-1}$，由 A 复正定有 $(QU)^*A(QU)$ 复正定，因而由文[2]定理 2 知：

$\lambda_k>0,(1\leqslant k\leqslant r),a_j>0,b_j>0,(1\leqslant j\leqslant m)$，令 $P=QU$ 则 P 复可逆且 $P^*AP=D$，$P^*BP=I,P^*(A+B)P=I+D$，从而由 $2a_j>0,(1\leqslant j\leqslant m)$ 及 Hölder 第二不等式可得：

$$
\begin{aligned}
|\det(P^*P)\det(A+B)|^{1/(n-m)} &= |\det[P^*(A+B)P]|^{1/(n-m)} \\
&= \{\prod_{k=1}^{r}[1+\lambda_k]\prod_{j=1}^{m}[(1+a_j)^2+b_j^2]\}^{1/(n-m)} \\
&> \{\prod_{k=1}^{r}(1+\lambda_k)\prod_{j=1}^{m}[1+(a_j^2+b_j^2)]\}^{1/(n-m)} \\
&> 1+[(\prod_{k=1}^{r}\lambda_k)\prod_{j=1}^{m}(a_j^2+b_j^2)]^{1/(n-m)} \\
&= |\det(P^*BP)|^{1/(n-m)}+|\det(P^*AP)|^{1/(n-m)} \\
&= |\det(P^*P)|^{1/(n-m)}[|\det A|^{1/(n-m)}+|\det B|^{1/(n-m)}],
\end{aligned}
$$

两边消去 $|\det(P^*P)|^{1/(n-m)}$，即得(1)式.

特别地，当 $m=0$ 时，可得到与著名的 Minkowski 不等式相应的结果：

系 1 设 A 为 n 阶复正定矩阵，B 为 n 阶 Hermite 正定阵，$B^{-1}A$ 的特征值全为实数，$n\geqslant 2$，则有广义 Minkowski 不等式：

$$|\det(A+B)|^{1/n}>|\det A|^{1/n}+|\det B|^{1/n}. \tag{2}$$

系 2 设 A 为 n 阶复正定矩阵，B 为 n 阶 Hermite 正定阵，$B^{-1}A$ 的非实特征值是 m 对共轭复数，$n\geqslant 2$，则对任意的 $t\geqslant 1/(n-m)$，有：

$$|\det(A+B)|^t>|\det A|^t+|\det B|^t. \tag{3}$$

证明 因 $t\geqslant 1/(n-m)$，即 $t(n-m)\geqslant 1$，所以由已知不等式[5]：$(x_1^s+x_2^s)^{1/s}\leqslant(x_1^r+x_2^r)^{1/r}$（其中 $x_1,x_2>0,0<r\leqslant s$），及定理 1 可知：

$$
\begin{aligned}
|\det(A+B)|^t &= [|\det(A+B)|^{1/(n-m)}]^{t(n-m)} \\
&> [(|\det A|^t)^{1/t(n-m)}+(|\det B|^t)^{1/t(n-m)}]^{t(n-m)} \\
&\geqslant [(|\det A|^t)^{1/1}+(|\det B|^t)^{1/1}]^1 \\
&= |\det A|^t+|\det B|^t.
\end{aligned}
$$

特别地，取 $t=1\geqslant 1/(n-m)$ 时，可得：

系 3 设 A 为 n 阶复正定矩阵，B 为 n 阶 Hermite 正定阵，$B^{-1}A$ 的非实特征值是 m 对共轭复数，$n\geqslant 2$，则有：

$$|\det(A+B)|>|\det A|+|\det B|. \tag{4}$$

定理 2 设 A、B 均为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，B 的特征值全为实数，A 的非实特征值是 m 对共轭复数，若 A 与 B 的换位子矩阵 $[A,B]=AB-BA$ 的秩 $r([A,B])\leqslant 1$，则有不等式(1)成立.

证明 由 Laffey－Choi 定理[6]，对满足 $r([A,B])\leqslant 1$ 的 A 与 B，必存在复可逆阵 P 使 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 同时为上三角阵，将 P 作 QR 分解：$P=QR$，此处 Q 为酉阵，R 为主对角元全大于 0 的上三角阵，于是 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 可同时化为：

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & & & *\\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1+b_1i & & & & \\ & & & & a_1-b_1i & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_m+b_mi & \\ 0 & & & & & & & a_m-b_mi\end{bmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}\mu_1 & & & *\\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n\end{bmatrix},$$

其中由 A、B 复正定及[2]定理 2 知：$\lambda_k>0,(1\leqslant k\leqslant r),a_j>0,b_j>0,(1\leqslant j\leqslant m),\mu_k>0(1\leqslant k\leqslant n)$，于是由 Hölder 第二不等式可得：

$$\begin{aligned}|\det(A+B)|^{1/(n-m)}&=\{\prod_{k=1}^{r}(\lambda_k+\mu_k)\prod_{j=1}^{m}[(a_j+\mu_{r+2j-1})(a_j+\mu_{r+2j})+b_j^2]\}^{1/(n-m)}\\ &>\{\prod_{k=1}^{r}(\lambda_k+\mu_k)\prod_{j=1}^{m}[(a_j^2+b_j^2)+\mu_{r+2j-1}\mu_{r+2j}]\}^{1/(n-m)}\\ &>[(\prod_{k=1}^{r}\lambda_k)\prod_{j=1}^{m}(a_j^2+b_j^2)]^{1/(n-m)}+[(\prod_{k=1}^{r}\mu_k)\prod_{j=1}^{m}\mu_{r+2j-1}\mu_{r+2j}]^{1/(n-m)}\\ &=|\det A|^{1/(n-m)}+(\prod_{j=1}^{n}\mu_j)^{1/(n-m)}\\ &=|\det A|^{1/(n-m)}+|\det B|^{1/(n-m)}.\end{aligned}$$

特别地，当 $m=0$ 时，可得到与著名的 Minkowski 不等式相应的结果：

系 4 设 A、B 为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，且它们的特征值全为实数，若 $r([A,B])\leqslant 1$，则有广义 Minkowski 不等式(2) 成立.

特别地，当 $AB=BA$ 时，$r([A,B])=0$，由系 4 可得：

系 5 设 A 与 B 是可交换的 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，且它们的特征值全为实数，则有广义 Minkowski 不等式(2) 成立.

系 6 设 A、B 均为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，B 的特征值全为实数，A 的非实特征值是 m 对共轭复数，若 $r([A,B])\leqslant 1$，则对任意的 $t\geqslant 1/(n-m)$，有不等式(3) 成立.

证明 与系 2 的证明相仿，从略.

特别地，当 $t=1\geqslant 1/(n-m)$ 时，可得：

系 7 设 A、B 均为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，B 的特征值全为实数，A 的非实特征值是 m 对共轭复数，若 $r([A,B])\leqslant 1$，则有不等式(4) 成立.

定理 3 设 A、B 均为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定矩阵，B 的特征值全为实数，A 的非实特征值是 m 对共轭复数，若 A 与 B 可同时相似于上三角阵，则有不等式(1) 与(3) 成立.

证 与定理 1 及系 2 的证明相仿，从略.

定理 4 设 $A=H+\sqrt{-1}K$(其中 $H=(A+A^*)/2,K=\sqrt{-1}(A^*-A)/2$，后同) 为 n 阶复正定阵，$n\geqslant 2$，则对任意 $t\geqslant 2/n$，有：

$$|\det A|^t\geqslant|\det H|^t+|\det K|^t.$$

证明 由文[3]定理 2 知：$|\det A|^{2/n}\geqslant|\det H|^{2/n}+|\det K|^{2/n}$，又 $2/(tn)\leqslant 1$，由已知不等

式[5]：$(x_1^s + x_2^s)^{1/s} \leqslant (x_1^r + x_2^r)^{1/r}$，$(x_1, x_2 > 0, 0 < r \leqslant s)$，及前述不等式可得：

$$
\begin{aligned}
|\det A|^t &= (|\det A|^{2/n})^{tn/2} \geqslant (|\det H|^{2/n} + |\det K|^{2/n})^{tn/2} \\
&= [(|\det H|^t)^{2/(tn)} + (|\det K|^t)^{2/(tn)}]^{tn/2} \\
&\geqslant [(|\det H|^t)^1 + (|\det K|^t)^1]^{1/1} = |\det H|^t + |\det K|^t.
\end{aligned}
$$

特别地，取 $t=1\geqslant 2/n$ 时，可得文[2]定理 4：

系 8　设 $A = H + \sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$ 阶复正定阵，则有：$|\det A| \geqslant |\det H| + |\det K|$.

系 9 (Ostrowski-Taussky)　设复阵 A 使 $H = (A + A^*)/2$ 是正定 Hermite 阵，则 $|\det A| \geqslant \det H$.

证明　因 H 为正定 Hermite 阵的充要条件是 A 为复正定阵[3]，所以由系 8 及 $\det H > 0$，$|\det K| \geqslant 0$ 可知：系 9 成立.

定理 5　设 $A = H + \sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$ 阶半复正定阵，则对任意的 $t \geqslant 2/n$，有

$$|\det A|^t \geqslant |\det H|^t + |\det K|^t.$$

证明　由文[3]推论 1 知：$|\det A|^{2/n} \geqslant |\det H|^{2/n} + |\det K|^{2/n}$，后仿照定理 4 的证明知：定理 5 成立.

特别地，取 $t = 1 \geqslant 2/n$ 时，可得

系 10　设 $A = H + \sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$ 阶半复正定阵，则有

$$|\det A| \geqslant |\det H| + |\det K|.$$

由系 10 易知 Ostrowski-Taussky 不等式可推广到半复正定阵上，即有

系 11　设 $A=H+\sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$阶半复正定阵，则有 $|\det A| \geqslant \det H$.

定理 6　设 $A=H+\sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$阶正规矩阵，则对任意的 $t \geqslant 2/n$，有

$$|\det A|^t \geqslant |\det H|^t + |\det K|^t.$$

证明　由文[3]定理 3 知：$|\det A|^{2/n} \geqslant |\det H|^{2/n} + |\det K|^{2/n}$，后仿照定理 4 的证明知：定理 6 成立.

特别地，取 $t=1\geqslant 2/n$ 时，可得

系 12　设 $A=H+\sqrt{-1}K$ 为 $n(\geqslant 2)$阶正规矩阵，则有

$$|\det A| \geqslant |\det H| + |\det K|.$$

参考文献：

[1] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Combridge University Press, 1985.

[2] 李俊杰. 论复矩阵的正定性 [J]. 数学的实践与认识, 1995, 2: 59—63.
LI Jun-jie. *The positive difinite quality of complex matrix is discussed* [J]. Mathematics in Practice and Theory, 1995, 2: 59—63. (in Chinese)

[3] 梁景伟. 有关矩阵正定性的几个不等式 [J]. 数学的实践与认识, 1988, 1: 56—60.
LIANG Jing-wei. *Several inequality that the concerned positive difinite quality of matrix* [J]. Mathematics in Practice and Theory, 1988, 1: 56—60. (in Chinese)

[4] 袁超伟, 游兆永. 几类推广的 Minkowski 不等式 [J]. 工程数学学报, 1996, 13(1): 15—21.
YUAN Chao-wei, YOU Zhao-yong. *How many kinds of Minkowski inequality are generalized* [J]. Journal of Engineering Mathematics, 1996, 13(1): 15—21. (in Chinese)

[5] 徐利治，王兴华. 数学分析的方法及例题选讲(修订版) [M]. 北京：高等教育出版社，1983.
HSU L C, WANG Xing-hua. *That the Method of Mathematical Analysis and Example Select Is Spoken (revision edition)* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1983. (in Chinese)
[6] 屠伯埙. 亚正定阵理论(Ⅰ) [J]. 数学学报，1991，34(1)：91—102.
TU Bo-xun. *The theory of metapositive definite matrix* (Ⅰ) [J]. Acta. Math. Sinica, 1991, 34(1): 91—102. (in Chinese)
[7] 华罗庚. 一个关于行列式的不等式 [J]. 数学学报，1955，5(4)：463—470.
HUA Loo-Keng. *The inequality about the determinant* [J]. Acta. Math. Sinica, 1955, 5(4): 463—470. (in Chinese)

Minkowski Inequality over Complex Positive Difinite Matrix

YUAN Hui-ping
(Dept. of Math., Yuzhou University, Chongqing 400033, China)

Abstract: Several determinantal inequalities for complex positive definite matrix are established, and Minkowski inequality and Ostrowski-Taussky inequality of Hermite matrix are generalized, and the results of some references are generalized and improved.
Key words: complex positive definite matrix; determinant; inequality.