第21卷第3期 2001年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 3 Aug. 2001

符号空间及逆极限空间上的正混沌*

李明军[1]，李开泰[2]

(1. 中国科学院力学所LHD实验室，北京 100080；2. 西安交通大学理学院，陕西 西安 710049)

摘　要：本文推广Li-Yorke混沌定义，给出正混沌的定义，得到一类描述正混沌的符号动力系统. 并证明紧致度量空间上的连续映射正混沌的充要条件是其逆极限空间上的移位映射是正混沌的.

关键词：符号空间；逆极限空间；正混沌.

分类号：AMS(1991) 58F08,54H20/CLC O174.1

文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)03-0469-06

1 引　言

在文献[1]中，Li和Yorke给出了混沌的第一个严格数学描述之后，人们从不同角度对混沌进行深人研究. 文献[2]根据线段映射的拓扑特征，定义了另一类混沌映射，指出该类映射蕴涵Li-Yorke混沌，并研究了符号空间上移位映射混沌集的测度性质. Schweizer-Smital混沌(简称SS混沌)最先在文献[3]出现，SS混沌一定是Li-Yorke混沌的. 文献[3]证明了单边符号空间的转移自映射存在具有零拓扑熵且为SS混沌的极小子转移，表明对一般系统而言正拓扑熵与发生在测度中心上的SS混沌不等价. 本文对Li-Yorke混沌作适当推广，给出正混沌定义.

设(X,d)为一个度量空间，$f\in C^0(X)$为连续自映射，记$p(f)$为f的所有周期点的周期的集合，而$P(f)$为f的所有周期点的集合. 若存在不可数集$S\subset X\backslash P(f)$，对任意$x,y\in S$，存在非负实数$C_{x,y}\geqslant 0$，满足 (i) $\lim\limits_{k\to\infty}\inf d(f^k(x),f^k(y))-C_{x,y}=0$；(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup d(f^k(x),f^k(y))-C_{x,y}>0$，则称$f$是广义Li-Yorke意义下混沌的，相应地，称$S$为广义Li-Yorke混沌集.

在上述定义中，若对任$x,y\in S$，均有$C_{x,y}>0$，则称f是正混沌的. 显然，若对任何$x,y\in S$，均有$C_{x,y}=0$，则上述定义就是通常所说的Li-Yorke混沌.

本文将给出一类描述正混沌的符号动力系统，并证明紧致度量空间上的连续满映为正混沌的充要条件是其逆极限空间上的移位映射是正混沌的.

---

* 收稿日期：1998-04-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目(19671067)
作者简介：李明军(1968-)，男，博士.

2 一类描述正混沌的符号动力系统

设 $\Sigma_2=\{x=(x_i)_{i=0}^{\infty},x_i\in\{0,1\}\}$，在 Σ_2 上引进度量 d，对任意 $x,y\in\Sigma_2$，

$$d(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}|x_i-y_i|/2^i,$$

称 (Σ_2,d) 为符号空间.

在 Σ_2 上定义移位映射 σ 为，$\sigma(x_0,x_1,\cdots)=(x_1,x_2,\cdots)$. 众所周知，$\sigma$ 是 Li-Yorke 意义下混沌的[6-7].

记 $\oplus$ 是循环群 Z_2 上的二元运算：$0\oplus 0=1\oplus 1=0$；$0\oplus 1=1\oplus 0=1$. 定义模映射 $m:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 为 $m((x_0,x_1,\cdots))=(x_0,x_0\oplus x_1,x_1\oplus x_2,\cdots)$. 显然 m 不是 Li-Yorke 意义下混沌的.

下述引理简单，证明从略.

引理 1 设 $x,y\in\Sigma_2$，i_0 为 $x_i\neq y_i$ 的第 1 个 i. 对任意 $k\geqslant 0$，$m^k(x)=(x_i')_{i=0}^{\infty}$，$m^k(y)=(y_i')_{i=0}^{\infty}$，则 i_0 为 $x_i'\neq y_i'$ 的第 1 个 i.

设 $x\in\Sigma_2$，称 $I_i=(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$ 为首坐标为 i 的长度为 4 的有限段. 记

$$\begin{aligned}I_i\oplus I_j&=(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})\oplus(x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3})\\&=(x_i\oplus x_i,x_{i+1}\oplus x_{i+1},x_{i+2}\oplus x_{i+2},x_{i+3}\oplus x_{i+3}).\end{aligned}$$

定义 $m((x_0,x_1,\cdots,x_i))=(x_0,x_0\oplus x_1,x_1\oplus x_2,\cdots,x_{i-1}\oplus x_i)$ 为 m 在 $(x_0,x_1,\cdots,x_i)$ 上的限制.

以 Z_+ 表示正整数集.

引理 2 模映射 $m:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 仅含一个不动点 $O=(0,0,\cdots)$，无其他任何周期点.

证明 显然，$O=(0,0,\cdots)\in\Sigma_2$ 是 m 的一个不动点.

据模映射 m 的特点，对任一 $x\in\Sigma_2$，$x\in O$，为求 x 的周期，可假设 $x_0=1$. 将 x 表成有限段序列 $x=(x_i)_{i=0}^{\infty}=(I_0,I_4,\cdots,I_{4k},\cdots)$，$m$ 在 (I_0,I_4,I_8,I_{12}) 上的限制的周期只可能是 $4^2k,k\in Z_+$. 将 4^2k 表成 $4^2k=4^2(2^na_n+2^{n-1}a_{n-1}+\cdots+2a_1+a_0)$，其中 $a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in\{0,1\}$，$a_n=1$. 不妨设 $a_i=1,a_{i-1}=\cdots=a_1=a_0=0,0\leqslant i\leqslant n$. 不难证明下述断语

断语 对任 $p\in Z_+$，有

$$m^{4^2\times 2^p}(x)=(I_0,I_4,\cdots,I_{4^2\times 2^p-4},I_0\oplus I_{4^2\times 2^p},I_4\oplus I_{4^2\times 2^p+4},\cdots).$$

记 $m^{4^2\times 2^p}(x)=(I_0,I_4,\cdots,I_{4^2\times 2^p-4},\hat{I}_{4^2\times 2^p},\hat{I}_{4^2\times 2^p+4},\cdots)$. 据上述断语有

$$m^{4^2\times 2^n}\cdot\cdots\cdot m^{4^2\times 2^{i+1}a_{i+1}}(x)=(I_0,I_4,\cdots,I_{4^2\times 2^i-4},\hat{I}_{4^2\times 2^{i+1}},\hat{I}_{4^2\times 2^{i+1}+4},\cdots).$$

从而，

$$\begin{aligned}m^{4^2k}(x)&=(m^{4^2\times 2^n}\cdot m^{4^2\times 2^{n-1}a_{n-1}}\cdots\cdot m^{4^2\times 2^{i+1}a_{i+1}})\cdot m^{4^2\times 2^ia_i}(x)\\&=(I_0,I_4,\cdots,I_{4^2\times 2^i-4},I_0\oplus I_{4^2\times 2^i},I_4\oplus I_{4^2\times 2^i+4},\cdots,\hat{I}_{4^2\times 2^i+1}\oplus I_{4^2\times 2^i},\cdots)(x).\end{aligned}$$

故 $m^{4^2k}(x)\neq x$，x 不是 m 的周期点. 从而，m 仅含一个不动点 $O=(0,0,\cdots)$，无其他任何周期点.

设 $x,y\in\Sigma_2$，以 $\uparrow_i$ 表示 x 与 y 满足这样的关系：x 与 y 的相应第 i 个坐标满足 $x_i\neq y_i$. 相应地，以 $\downarrow_i$ 表示 x 与 y 满足这样的关系：x 与 y 的相应第 i 个坐标满足 $x_i=y_i$. 设 $m(x)=$

$(x_i')_{i=0}^{\infty}$，$m(y)=(y_i')_{i=0}^{\infty}$，利用 m 的定义，以 $(\uparrow\uparrow)_i \xrightarrow{m} (\downarrow\uparrow)_i$ 表示这样的关系运算：$x_i=y_i$，$x_{i+1}=y_{i+1}$，而且 $x_i'\neq y_i'$，$x_{i+1}'=y_{i+1}'$. 相应地，以 $(\uparrow\uparrow)_i \xrightarrow{m} (\uparrow\uparrow)_i$ 表示这样的关系运算：$x_i'=y_i'$，$x_{i+1}=y_{i+1}$，而且 $x_{i+1}'=y_{i+1}'$，$x_{i+1}'=y_{i+1}'$. 这样的关系运算称为坐标对比运算.

定理 1 模映射 $m:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 是正混沌的.

证明 记 $S=\Sigma_2\setminus\{0\}$. 据引理 2 知，S 为不含周期点的不可数集. 下证 S 为 m 的正混沌集.

对任 $x,y\in S$，$x\neq y$，记 j 为 $x_j\neq y_j$ 的第 1 个 j，x 与 y 的第 $j+1$，$j+2$ 及 $j+3$ 个坐标对应共有 8 种组合情形. 下面选择两种情形证明，均存在实数 $C_{x,y}$ 满足

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\inf d(m^k(x),m^k(y))-C_{x,y}=0$；(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup d(m^k(x),m^k(y))-C_{x,y}>0$.

第 1 种情形：$x_{j+1}=y_{j+1}$，$x_{j+2}=y_{j+2}$，$x_{j+3}\neq y_{j+3}$. 这时，据引理 1 知

$(\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow)_j$ （周期为 4）.

那么，对任意正整数，经过具体估计有如下三个不等关系式.

$$\frac{14}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^{4k+3}(x),m^{4k+3}(y))\leqslant\frac{15}{8}\times\frac{1}{2^j},$$

$$\frac{9}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^{4k}(x),m^{4k}(y))\leqslant\frac{10}{8}\times\frac{1}{2^j},$$

$$\frac{9}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^k(x),m^k(y))$$

故存在 $C_{x,y}\geqslant\frac{9}{8}\times\frac{1}{2^j}>0$，满足(a)，(b).

第 2 种情形：$x_{j+1}=y_{j+1}$，$x_{j+2}=y_{j+2}$，$x_{j+3}=y_{j+3}$. 这时，据引理 1 知

$(\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow)_j \xrightarrow{m} (\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow)_j$ （周期为 4）.

那么，对任意正整数，经过具体估计有如下三个不等关系式.

$$\frac{15}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^{4k+3}(x),m^{4k+3}(y))\leqslant\frac{16}{8}\times\frac{1}{2^j},$$

$$\frac{8}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^{4k}(x),m^{4k}(y))\leqslant\frac{9}{8}\times\frac{1}{2^j},$$

$$\frac{9}{8}\times\frac{1}{2^j}\leqslant d(m^k(x),m^k(y))$$

故存在 $C_{x,y}\geqslant\frac{8}{8}\times\frac{1}{2^j}>0$，满足(a)，(b).

对于其他六种情形，类似可证存在 $C_{x,y}\geqslant\frac{8}{8}\times\frac{1}{2^j}>0$，满足(a)，(b).

3 逆极限空间上的正混沌

设 (X,d) 为一个紧致度量空间，$f\in C^0(X)$ 为连续自映射. 记 $X_f=\{\hat{x}=(x_i)_{i=0}^{\infty}:x_i\in X$，$f(x_{i+1})=x_i,i\geqslant 0\}$. 在 X_f 上引进度量 $\hat{d}$ 为：对任意 $\hat{x},\hat{y}\in X_f$，$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\sum\limits_{i=0}^{\infty}d(x_i,y_i)/2^i$，空间 $(X_f,\hat{d})$ 称为逆极限空间，记作 $\varprojlim\langle X,f\rangle$，定义移位映射 $\sigma_f:\varprojlim\langle X,f\rangle\to\varprojlim\langle X,f\rangle$ 为，

$\sigma_f(x_0,x_1,\cdots)=(\sigma_f(x_0),x_0,x_1,\cdots)$，定义 $\pi_i:\varprojlim\langle X,f\rangle\to X$ 为，$\pi_i(x_0,x_1,\cdots,x_1,\cdots)=x_i$，显然，$\pi_1$ 连续.

引理 3[5] 设 $x_0\in X$，π_i 定义如上. 那么，$\pi_i^{-1}(x_0)\neq\varnothing$ 当且仅当 $x_0\in X_0=f^n(X)$.

下述引理简单，证明从略.

引理 4 设 $p(f)$ 为 f 的周期点集. 那么，逆极限空间上的移位映射 σ_f 的周期点集为

$$p(\sigma_f)=\{\hat{x}=(x_i)_{i=0}^{\infty}:x\in p(f),\text{其周期为 }n,\text{且 }x_{nk}=x_0,\forall\, k\in Z_+\}$$

为了证明定理 2，还须给出紧致空间上连续自映射的两个基本引理，其中的引理 5 简单，证明从略.

引理 5 设 (X,d) 为一个紧致度量空间，$\varprojlim\langle X,f\rangle$ 为逆极限空间. 那么，对任 $\delta>0$，$N>0$，对任 $z,w\in\varprojlim\langle X,f\rangle$，$\sum\limits_{i=N}^{\infty}d(z_i,w_i)/2^j<\delta$.

引理 6[4] 设 (X,d) 为一个紧致度量空间，$f\in C^0(X)$ 为连续自映射. 那么，对任一 $N>0$，必存在 $0<\rho<\dfrac{\delta}{4}$，对任意 $s,t\in X$，当 $d(s,t)<\rho$ 时，有

$$\max\{d(f^i(x),f^i(y)),1\leqslant i\leqslant N\}<\frac{\delta}{2}.$$

定理 2 设 $f\in C^0(X)$ 为连续满映射. 那么，f 为正混沌的充要条件是其逆极限空间上的移位映射 σ_f 是正混沌的.

证明 首先，设 σ_f 是正混沌的，$T\subset\varprojlim\langle X,f\rangle\backslash p(\sigma_f)$ 是 σ_f 的不可数正混沌集.

对任意 $x,y\in T$，存在 $\hat{C}_{x,y}>0$，有 (i) $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\hat{C}_{x,y}=0$；(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\hat{C}_{x,y}>0$. 故 $\pi_0(x)\neq\pi_0(y)$. 令 $S=\{x_0$：对任 $x\in T$，取 $x_0=\pi_0(x)\}$，据引理 4 知，$S\subset X\backslash P(f)$ 为不可数集. 下证 S 是 f 的正混沌集.

任取 $x_0,y_0\in S$，$x_0=\pi_0(x)$，$y_0=\pi_0(y)$，其中 $x,y\in T$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf d(f^k(x_0),f^k(y_0))=0$，据引理5及引理6可知，任给 $\delta>0$，存在 N 及充分大的 M，使得

$$\hat{d}(\sigma_f^{N+M}(x),\sigma_f^{N+M}(y))=\sum_{i=0}^{N-1}d(x_i,y_i)/2^i+\frac{1}{2^N}\hat{d}(\sigma_f^{1+M}(x),\sigma_f^{1+M}(y))$$

$$\leqslant\frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2^i}+\frac{\delta}{4}<\delta$$

由 δ 及 M 的任意性，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))=0$，这与(i)矛盾. 故存在 $C_{x_0,y_0}>0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\inf d(f^k(x_0),f^k(y_0))-C_{x_0,y_0}=0$$

另一方面，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup d(f^k(x_0),f^k(y_0))-C_{x_0,y_0}=0$，据引理5及引理6可知，

$$\lim_{n\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))=2C_{x_0,y_0}$$

这与(i)，(ii)矛盾. 从而，S 是 f 的正混沌集，f 是正混沌的.

其次，设 f 是正混沌的，$S\subset X\backslash P(f)$ 是 f 的不可数正混沌集.

对任意 $x_0,y_0\in S$，$x,y\in T$，存在 $C_{x_0,y_0}>0$，有

(a) $\lim\limits_{k\to\infty}\inf d(f^k(x_0),f^k(y_0))-C_{x_0,y_0}=0$；(b) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup d(f^k(x_0),f^k(y_0))-C_{x_0,y_0}>0$.

f 是满映射，据引理3，可令 $T=\{x$：对任 $x_0\in S$，选定一个 $x\in\pi_0^{-1}(x_0)\}$. 据引理4可知，$T\subset$

$\underleftarrow{\lim}\langle X,f\rangle\setminus p(\sigma_f)$是$\sigma_f$的不可数集，下证$T$是$\sigma_f$的正混沌集.

任取$x,y\in T$，由于$\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))\geqslant d(f^k(x_0),f^k(y_0))$. 故由(1)式及$f$的紧性可知，必存在$\hat{C}_{x,y}\geqslant C_{x_0,y_0}>0$，使得$\liminf\limits_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\hat{C}_{x,y}=0$. 下面来证

$$\limsup_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\hat{C}_{x,y}>0.$$

为了便于讨论，记

$$\liminf_{k\to\infty}d(f^k(x_0),f^k(y_0))=a;\quad \limsup_{k\to\infty}d(f^k(x_0),f^k(y_0))=b.$$

显然，$a<b$. 任给充分小的$\varepsilon>0$，存在充分大的K，当$n>K$时，有

$$d(f^k(x_0),f^k(y_0))\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon).$$

根据引理5知，存在N，对任意$z,w\in\underleftarrow{\lim}\langle X,f\rangle$，有$\sum\limits_{i=N+1}^{\infty}d(z_i,w_i)/2^i<\varepsilon/2$. 由$a$及$b$的定义，存在$M,p\geqslant K+M$，使得

$$|d(f^M(x_0),f^M(y_0))-a|<\varepsilon/2,\quad |d(f^M(x_0),f^M(y_0))-b|<\varepsilon/2.$$

下面分三种情形进行分析：

(Ⅰ)若$\max\{d(f^{M-1}(x_0),f^{M-1}(y_0)),d(f^{M-2}(x_0),f^{M-2}(y_0))\}<\dfrac{3a+b}{4}$，则

$$\hat{d}(\sigma_f^M(x),\sigma_f^M(y))>b-\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{a-\varepsilon}{2^i}-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\hat{d}(\sigma_f^{M-1}(x),\sigma_f^{M-1}(y))<\frac{3a+b}{4}+\frac{3a+b}{8}+\sum_{i=2}^{N}\frac{b+\varepsilon}{2^i}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，$\hat{d}(\sigma_f^M(x),\sigma_f^M(y)-\hat{d}(\sigma_f^{M-1}(x),\sigma_f^{M-1}(y))>\dfrac{b-a}{8}-3\varepsilon$. 据$\varepsilon$及$K$的任意性，知

$$\limsup_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\liminf_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))\geqslant\frac{b-a}{8}>0.$$

(Ⅱ)若$d(f^{M-1}(x_0),f^{M-1}(y_0))\geqslant\dfrac{3a+b}{4}$，则

$$\hat{d}(\sigma_f^M(x),\sigma_f^M(y))>b-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3a+b}{8}+\sum_{i=1}^{N}\frac{a-\varepsilon}{2^i}-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\hat{d}(\sigma_f^p(x),\sigma_f^p(y))<a+\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=2}^{N}\frac{b+\varepsilon}{2^i}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而$\hat{d}(\sigma_f^M(x),\sigma_f^M(y)-\hat{d}(\sigma_f^p(x),\sigma_f^p(y))>\dfrac{b-a}{8}-\dfrac{7\varepsilon}{2}$. 据$\varepsilon$及$K$的任意性，知

$$\limsup_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\liminf_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))\geqslant\frac{b-a}{8}>0.$$

(Ⅲ)若$d(f^{M-2}(x_0),f^{M-2}(y_0))\geqslant\dfrac{3a+b}{4}$，与讨论(Ⅱ)类似可得

$$\limsup_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))-\liminf_{k\to\infty}\hat{d}(\sigma_f^k(x),\sigma_f^k(y))\geqslant\frac{3(b-a)}{16}>0.$$

以上三种情形都已说明σ_f为正混沌集.

参考文献:

[1] LI T Y, YORK J. *Period 3 implies chaos* [J]. Amer. Math. Monthly, 1975, **82**: 985—992.

[2] 熊金城. 符号空间转移自映射混沌集合的 Hausdorff 维数 [J]. 中国科学, 1995, **25**(1): 1—11.
XIONG Jin-cheng. *Hausdorff dimension of chaotic set of shift maps in symbolic spaces* [J]. Science in China (Series A), 1995, **25**(1): 1—11. (in Chinese)

[3] 廖公夫,范钦杰. 拓扑熵为零且 Schweizer-Smital 混沌的极小子转移 [J]. 中国科学 A 辑, 1997, **27**(9): 769—774.
LIAO Gong-fu, FAN Qin-jie. *Minimal sub-shift maps of 0-topological entropy and Schweizer-Smital chaotic* [J]. Science in China (Series A), 1997, **27**(9): 769—774. (in Chinese).

[4] CHEN Liang, LI Shi-hai. *Shadowing property for inverse limit spaces* [J]. Proc. Ams., 1992, **115**: 573—580.

[5] 李明军. 逆极限空间上的ω混沌 [J]. 数学研究与评论, 1996, **16**(3): 371—375.
LI Ming-jun. *ω-chaos in inverse limit spaces* [J]. J. of Math. Res. & Expo., 1996, **16**(3): 371—375. (in Chinese).

[6] 麦结华. 一类描述非混映射的符号动力系统 [J]. 科学通报, 1993, **38**(15): 1427—1430.
MAI Jie-hua. *A kind of symbolic dynamical systems describing non-chaotic maps* [J]. Chinese Science Bulletin, 1993, **38**(15): 1427—1430. (in Chinese)

[7] 张锦炎,钱 敏. 微分动力系统导引 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
ZHANG Jin-yan, Qian Min. *An Introduction to Differential Dynamical System* [M]. Beijing: Publishing Company of Beijing University, 1991. (in Chinese)

[8] SCHWEIZER B, SMITAL J. *Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of the interval* [J]. Trans. Ams., 1994, **344**(2): 737—754.

Positive Chaos on Symbolic Space and Inverse Limit Space

LI Ming-jun[1], LI Kai-tai[2]

(1. Inst. of Mech., Chinese Academic of Science, Beijing 100080, China;
2. Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this paper, Li-York chaos is generalized, and positive chaos is defined. Then, a class of symbol dynamical system describing positive chaos is obtained. If f is onto, then f is positive chaos if and only if the shift map σ_f on limit space is positive chaos.

Key words: positive chaos; symbolic space; inverse limit space.