第21卷第4期
2001年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 4
Nov. 2001

关于Orlicz序列空间的包含关系*

严 亚 强
(苏州大学理学院数学系，江苏 苏州 215006)

摘 要：设 Φ,Ψ 为一对互余的 N-函数，本文给出了包含关系 $l^1\subset l^\Psi\subset \bigcap\limits_{p>1} l^p\subset \bigcup\limits_{p>1} l^p\subset l^\Phi\subset c_0$ 成立的充要条件，并修正 Chen[1, p. 168]的一个例子.

关键词：Orlicz空间；N-函数；包含关系.
分类号：AMS(1991) 46E30/CLC O117.30
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0552-03

设一对互余的 N-函数为

$$\Phi(u)=e^{|u|}-|u|-1,\ \Psi(v)=(1+|v|)\ln(1+|v|)-|v|. \tag{1}$$

Chen[1, p. 168]断言上述 N-函数满足(集合论意义下)包含关系

$$l^1\subset l^\Psi\subset\bigcap\{l^p:1<p<\infty\}\subset\bigcup\{l^p:1<p<\infty\}\subset l^\Phi\subset c_0. \tag{2}$$

这一断言不真，事实上，有以下

定理 1 设 Φ,Ψ 由(1)确定，则以下(集合论意义下)等式成立

$$l^\Phi=l^2=l^\Psi. \tag{3}$$

先列出若干已知引理．本文符号同[1]，例如 l^Φ 表示由 Φ 生成的Orlicz序列空间．

引理 1 [2, p. 307] 设 M,Ψ 为两个 N-函数，则以下三者等价：

(i) 存在常数 $b>0$ 和 $u_0>0$ 使

$$M(u)\leqslant\Psi(bu),\ 0\leqslant u\leqslant u_0 \tag{4}$$

(ii) $l^\Psi\subset l^M$.

(iii) 存在 $C>0$，使 $\|x\|_M\leqslant C\|x\|_\Psi, x\in l_\Psi$.

引理 2 [2, p. 307] 设 M,Ψ 为两个 N-函数，以下三者等价：

(i) Ψ 和 M 在点0附近等价(记为 $\Psi\sim M$)，即存在 $0<a\leqslant b<\infty, u_0>0$，使

$$\Psi(au)\leqslant M(u)\leqslant\Psi(bu),\quad 0\leqslant u\leqslant u_0.$$

(ii) $l^\Psi=l^M$.

(iii) 存在 $0<C_1\leqslant C_2<\infty$，使 $C_1\|x\|_\Psi\leqslant\|x\|_M\leqslant C_2\|x\|_\Psi$.

定理 1 的证明 先证 $l^\Phi=l^2$. 设 $M(u)=u^2/2$，则 $l^M=l^2$. 由(1)可知，当 $u\geqslant 0$ 时，

$$\Phi(u)=\frac{u^2}{2}+u^2\sum_{n\geqslant 3}^{\infty}\frac{u^{n-2}}{n!}, \tag{5}$$

* 收稿日期：1999-01-11
E-mail: yanyq@pub.sz.jsinfo.net

因此，当 $u \geqslant 0$ 时，$M(u) \leqslant \Phi(u)$. 另一方面，当 $0 \leqslant u \leqslant 1$ 时，

$$\Phi(u) \leqslant \frac{u^2}{2} + u^2 \sum_{n \geqslant 3}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{u^2}{2} + (e - \frac{5}{2}) u^2 < u^2.$$

因此，当 $0 \leqslant u \leqslant 1$ 时，$\Phi(u) \leqslant M(\sqrt{2}u)$. 由引理 2，$l^{\Phi} = l^2$. 从 $\Phi \sim M$(在 0 点) 可知，$\Psi \sim N$. 这里 $N(v) = v^2/2$ 是 $M(u)$ 的余 N- 函数，再由引理 2，$l^{\Psi} = l^N = l^2$. □

定理 2 设 Φ, Ψ 为一对互余的 N- 函数，则包含关系(2) 成立的充要条件为：对于任给 $p \in (1, \infty)$，存在 $b = b(p) > 0, u_0 = u_0(p) > 0$，使

$$u^p \leqslant \Psi(bu), \quad 0 \leqslant u \leqslant u_0. \tag{6}$$

证明 *必要性*. 由(2)，对于任给 $p > 1$，$l^{\Psi} \subset l^p$. 令 $M(u) = u^p/p$，由引理 1，存在 $b > 0$，$u_0 > 0$，当 $0 \leqslant u \leqslant u_0$ 时，$M(u) \leqslant \Psi(bu)$，即(6) 成立.

充分性. 当(6) 成立时，Ψ 快于任何幂函数，由引理 1，$l^{\Psi} \subset l^M = l^p$，从而，$l^{\Psi} \subset \bigcap \{l^p : 1 < p < \infty\}$. 又因 $N(v) = |v|^q/q, 1/p + 1/q = 1$，由类似[3. 定理 2.1]的结果和引理 1 得到 $l^q = l^N \subset l^{\Phi}$. 所以，$\bigcup \{l^q : 1 < q < \infty\} \subset l^{\Phi}$. 其他包含关系自然成立. □

满足(2) 的 N- 函数对 Φ, Ψ 是存在的，因为有

推论 1 设 Φ, Ψ 是一对互余的 N- 函数，ψ 是 Ψ 的右导数，若

$$\lim_{t \to 0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} = 1, \tag{7}$$

则包含关系(2) 成立.

证明 由(7) 可知，任给 $p \in (1, \infty)$，存在 $v_0 = v_0(p) > 0$，使 $\frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} < p, 0 < t \leqslant v_0$.
当 $0 < v \leqslant v_0$ 时，$\ln \frac{\Psi(v_0)}{\Psi(v)} = \int_v^{v_0} \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} \mathrm{d}t \leqslant \int_v^{v_0} \frac{p}{t} \mathrm{d}t = \ln(\frac{v_0}{v})^p$，即

$$\frac{\Psi(v_0)}{v_0^p} v^p \leqslant \Psi(v), \quad 0 < v \leqslant v_0. \tag{8}$$

当 $v = 0$ 时，(8) 也成立. 令 $a = \frac{(\Psi(v_0))^{\frac{1}{p}}}{v_0}, u = \frac{v}{a}, b = \frac{1}{a}, u_0 = \frac{v_0}{a}$，则当 $0 \leqslant u \leqslant u_0$ 时，由(8) 得到(6)，由定理 2 之充分性知(2) 成立.

例 1 考察 Kaminska[4，p. 304] 构造的 N- 函数

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ e^{-\frac{1}{|u|}}, & |u| \in (0, 1/2], \\ 4e^2 u^2, & |u| \in [1/2, \infty). \end{cases} \tag{9}$$

由 $C_{\Phi}^0 = \lim_{t \to 0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = \infty$ 及 Rao 和 Ren[5，Lemma 4.7] 可知，$C_{\Psi}^0 = \lim_{t \to 0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} = 1$，这里 Ψ 为 Φ 的余 N- 函数，由推论 1 可知，这里的 Φ 和 Ψ 满足(2).

陈述涛[1，p. 168] 指出，由(1) 确定的一对 N- 函数 Φ 和 Ψ 满足

$$L^{\infty} \subset L^{\Phi} \subset \bigcap \{L^p : 1 < p < \infty\} \subset \bigcup \{L^p : 1 < p < \infty\} \subset L^{\Psi} \subset L^1, \tag{10}$$

这里的 Orlicz 函数空间和 L^{∞}, L^1 都是定义在同一个欧氏空间的有界闭集 G 上的. 上述结论是正确的(见以下例 2)，一般地，我们有

定理 3 设 Φ, Ψ 为一对互余的 N- 函数，则包含关系(10) 成立的充要条件为：对于较大的 u，Φ 快于任一幂函数，即对于任给 $p \in (1, \infty)$，存在 $b = b(p) > 0, u_0 = u_0(p) > 0$，使

$$u^p \leqslant \Phi(bu), \quad u \geqslant u_0. \tag{11}$$

证明 可由吴从炘,王廷辅[6,p.88]定理3.1导出.

对于较大的u,快于任一幂函数的N-函数是存在的,例如,满足$\triangle_3$条件和∇^2条件的N-函数都是快于任何幂函数的(见[6]的p.29命题2.4和p.31命题2.5).

推论2 设Φ,Ψ是一对互余的N-函数,若

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = \infty, \tag{12}$$

则(10)成立.

证明 由(12),对于任给$p \in (1,\infty)$,存在$u_0 = u_0(p) > 0$,使$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} > p, t \geqslant u_0$. 于是,当$t \geqslant u_0$时,$\ln\frac{\Phi(u)}{\Phi(u_0)} = \int_{u_0}^{u}\frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}\mathrm{d}t > \int_{u_0}^{u}\frac{p}{t}\mathrm{d}t = \ln(\frac{u}{u_0})^p$,则(11)成立,由定理3,包含关系(10)成立.

例2 (1)中的第一个N-函数Φ满足(12),所以由(1)确定的一对N-函数Φ,Ψ满足(10).

本文得到王金才,张涛同志的协助,谨此致谢.

参考文献:

[1] CHEN S T. *Geometry of Orlicz Spaces*[D]. Warszawa:Dissertatinoes Math, 1996, **356**: 1—204.

[2] KAMTHJAN P K, GUPTA M. *Sequence Spaces and Series*[A]. Lect. Note in Pure and Appl[C]. New York:Marcel Dekker, 1981, **65**: 297—311.

[3] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII YA B. *Convex Functions and Orlicz Spaces*[M]. Gronignen:Noordhoff, 1961(有中译本,吴从炘译,北京:科学出版社,1962).

[4] KAMINSKA A. *Strict convexity of sequence Musielak-Orlicz spaces with Orlicz norm* [J]. Func Anal, 1983, **50**: 285—305.

[5] RAO M M, REN Z D. *Packing in Orlicz sequence spaces* [J]. Studia Math., 1997, **126**: 245—251.

[6] 吴从炘,王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨:黑龙江科学技术出版社, 1983.
WU Cong-xin, WANG Ting-fu. *Orlicz Spaces and Applications* [M]. Heilongjiang Sci. and Tech. Press, Harbin, 1983.

On Some Inclusion of Orlicz Sequence Spaces

YAN Ya-qiang

(Dept. of Math., School of Sci., Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: For a pair (Φ,Ψ) of complementary N-functions, we find necessary and sufficient conditions under which the following inclusion relations hold

$$l^1 \subset l^\Psi \subset \bigcap_{p>1} l^p \subset \bigcup_{p>1} l^p \subset l^\Phi \subset c_0.$$

Key words: Orlicz spaces; N- functions; inclusion relations.