第21卷第4期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

广义双正则函数带共轭值带位移的边值问题*

谢永红， 黄 沙， 乔玉英
(河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)

摘 要：本文讨论实 Clifford 分析中广义双正则函数的带共轭值和带位移的非线性边值问题. 首先得到其 Plemelj 公式，然后用积分方程的方法和 Schauder 不动点定理讨论了这个边值问题的可解性.

关键词：Clifford 分析；广义双正则函数；边值问题；积分方程.
分类号：AMS(1991) 30G35/CLC O177.4
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)04-0567-06

1 引 言

设 A 为实 Clifford 数，其正交基由 $e_A: A=(h_1,h_2,\cdots,h_r)\in P\{1,2,\cdots,n\}, 1\leqslant h_1<\cdots<h_r\leqslant n$ 给出；此外，$e_\varnothing=e_0$ 表示单位元素，且 $e_ie_j=-e_je_i, i\neq j, e_i^2=-1, i,j=1,2,\cdots,n$. A 中的元素 u 可表示成 $u=\sum\limits_A u_Ae_A$. 定义 $|u|^2=\sum\limits_A|u_A|^2$，有

$$|u+v|\leqslant|u|+|v|,\ |uv|\leqslant J_1|u||v|\quad (J_1\text{ 是正常数})\tag{1}$$

Clifford 分析是本世纪初创立的[1]，1970 年以来得到很大发展[2]. 近几年我国学者徐振远[3]，闻国椿[4]，黄沙[5]-[7]，乔玉英[8],[9] 等在 Clifford 边值问题研究中做了大量工作. 本文在以上工作的基础上研究了一类带共轭值带位移的非线性边值问题，推广了[6,7,9]的结果.

2 预备知识

Euclidean 空间 $R^{m+k+2}=R^{m+1}\times R^{k+1}, 1\leqslant m\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant n$ 中的一个连通开集 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，$\Omega_i$ 的边界 $\partial\Omega_i$ 均为光滑、定向、紧致的 Liapunov 曲面，$\partial\Omega_i$ 的定向是 Ω_i 的诱导定向($i=1,2$). $F_\Omega^{(r)}=\{f|f:\Omega\to A, f(x,y)=\sum\limits_A f_A(x,y)e_A, f_A(x,y)\in C^r(\Omega), x\in R^{m+1}, y\in R^{k+1}\}$ 是一函数空间. 对于 $f\in F_\Omega^{(r)}(r\geqslant1)$，我们称方程组$\begin{cases}D_xf=0\\ fD_y=0\end{cases}$的解为双正则函数[6]. 如同文[7]，

* 收稿日期：1998-04-20
基金项目：国家自然科学基金(19771068)，河北省自然科学基金和河北省教委资助项目(198155)
作者简介：谢永红(1973-)，女，硕士，助教.

引进 Hölder 连续函数 $f(u,v)$ 的 Banach 空间 $H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，且定义 $\|f\|_\beta=C(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,f)+H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$. 易证

$$\|f+g\|_\beta\leqslant\|f\|_\beta+\|g\|_\beta,\ \|f_g\|_\beta\leqslant J_2\|f\|_\beta\|g\|_\beta. \tag{2}$$

其中 J_2 为正常数，$f,g\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，以下我们记 $t'=(t_{11},t_{21}),t''=(t_{12},t_{22})$.

3　广义双正则函数的积分表达式和几个奇异积分算子

我们假设 $F_1,F_2\in C^1(\Omega)$，并且定义

$$\begin{cases}D_xW=F_1\\ WD_y=F_2\end{cases} \tag{3}$$

的解 $W(x,y)$ 为广义双正则函数[7].

设 $F_1,F_2\in C^1(\Omega)$，则方程(7) 可解的必要条件是

$$F_1D_y=D_xF_2, \tag{4}$$

称条件(4) 为(3) 的相容条件[7].

以下我们设 Ω_1,Ω_2 分别为 R^{m+1},R^{k+1} 中的单位球，引人奇异积分算子

$$\begin{cases}T_1F(x,y)=\dfrac{-1}{\omega_{m+1}}\displaystyle\int_{\Omega_1^+}E(x)F(u,y)\mathrm{d}u+\dfrac{-1}{\omega_{m+1}}\int_{\Omega_1^+}\overline{E(x)}F\left(\frac{1}{u},y\right)\mathrm{d}u,\\ T_2F(x,y)=\dfrac{-1}{\omega_{m+1}}\displaystyle\int_{\Omega_2^+}F(x,v)E(y)\mathrm{d}v+\dfrac{-1}{\omega_{k+1}}\int_{\Omega_2^+}F\left(x,\frac{1}{v}\right)\overline{E(y)}\mathrm{d}v,\end{cases} \tag{5}$$

其中

$$E(x)=\frac{\bar u-\bar x}{|u-x|^{m+1}},E(y)=\frac{\bar v-\bar y}{|v-y|^{k+1}},\overline{E(x)}=\frac{\overline{\frac{1}{u}}-\bar x}{\left|\frac{1}{u}-x\right|^{m+1}|u|^{2(m+1)}},$$

$$\overline{E(y)}=\frac{\overline{\frac{1}{v}}-\bar y}{\left|\frac{1}{v}-y\right|^{k+1}|v|^{2(k+1)}}$$

分别是 R^{m+1},R^{k+1} 中单位超球面的曲面面积.

引理 1[7]　设(3) 中 $F_1,F_2\in C^1(\Omega)$，(其中 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$)，且适合相容条件(4)，设对于每个 $x\in R^{m+1}$，$F_i(x,y)\in L^{q,k+1}(R^{k+1})$，并且其 Hölder 常数与 x 无关；每个固定 $y\in R^{k+1}$，$F_i(x,y)\in L^{p,m+1}(R^{m+1})$，并且其 Hölder 常数与 y 无关，$p>m+1,q>k+1,i=1,2$. F_1D_y，$T_1(F_1D_y)$ 也满足以上条件，则在 $\Omega_1^\pm\times\Omega_2^+,\Omega_1^\pm\times\Omega_2^-$ 中广义双正则函数 $W(x,y)$ 有如下积分表达式：

$$W(x,y)=T_1F_1+T_2[F_2-(T_1F_1)D_y]+\Phi(x,y), \tag{6}$$

其中 $\Phi(x,y)=\dfrac{1}{\omega_{m+1}\omega_{k+1}}\displaystyle\int_{\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2}E(x)\mathrm{d}\sigma_u\varphi(u,v)\mathrm{d}\sigma_vE(y)$ 是 $\Omega_1^\pm\times\Omega_2^+,\Omega_1^\pm\times\Omega_2^-$ 中的双正则函数，且

$$\Phi(x,\infty)=\Phi(\infty,y)=\Phi(\infty,\infty)=0,\varphi(u,v)\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta).$$

我们记 $\Omega_i^+=\Omega_i(i=1,2)$，$\Omega_1^-=R^{m+1}\backslash\overline{\Omega_1}$，$\Omega_2^-=R^{k+1}\backslash\overline{\Omega_2}$. 设 x 从 $\Omega_1^\pm$ 趋于 $t_1\in\partial\Omega_1$，记

作 $x \to t_1^{\pm}$, y 从 $\Omega_2^{\pm}$ 趋于 $t_2 \in \Omega_2$, 记作 $y \to t_2^{\pm}$, 当 $(x,y) \to (t_1^{\pm}, t_2^{\pm})$ 时 $W(x,y)$, $\Phi(x,y)$ 极限值分别记作 W^{ij}, $\Phi^{ij}(j=\pm)$.

引理 2[7] 在引理1的条件下,引进奇异积分算子 $T_3(F_1D_y) = T_2[(T_1F_1)D_y]$, 又设 $F_1(x,\infty) = F_2(\infty,y) = 0$, 则有广义双正则函数的 Plemelj 公式:

$$
\left.\begin{aligned}
W^{++}(t_1,t_2) &= (T_1F_1)(t_1,t_2) + (T_2F_2)(t_1,t_2) - [T_3(F_1D_y)](t_1,t_2) + \\
&\quad \frac{1}{4}[\varphi + P_1\varphi + P_2\varphi + P_3\varphi](t_1,t_2), \\
W^{+-}(t_1,t_2) &= (T_1F_1)(t_1,t_2) + (T_2F_2)(t_1,t_2) - [T_3(F_1D_y)](t_1,t_2) + \\
&\quad \frac{1}{4}[-\varphi - P_1\varphi + P_2\varphi + P_3\varphi](t_1,t_2), \\
W^{-+}(t_1,t_2) &= (T_1F_1)(t_1,t_2) + (T_2F_2)(t_1,t_2) - [T_3(F_1D_y)](t_1,t_2) + \\
&\quad \frac{1}{4}[-\varphi + P_1\varphi - P_2\varphi + P_3\varphi](t_1,t_2), \\
W^{--}(t_1,t_2) &= (T_1F_1)(t_1,t_2) + (T_2F_2)(t_1,t_2) - [T_3(F_1D_y)](t_1,t_2) + \\
&\quad \frac{1}{4}[\varphi - P_1\varphi - P_2\varphi + P_3\varphi](t_1,t_2),
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

其中 $(t_1,t_2) \in \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$, $P_1\varphi = \frac{2}{\omega_{m+1}}\int_{\partial\Omega_1} E(t_1)\mathrm{d}\sigma_u\varphi(u,t_2)$, $P_2\varphi = \frac{2}{\omega_{k+1}}\int_{\partial\Omega_2}\varphi(t_1,v)\mathrm{d}\sigma_v E(t_2)$, $P_3\varphi = 4\Phi(t_1,t_2)$, 且 $W(x,\infty) = W(\infty,y) = W(\infty,\infty) = 0$.

定义 1 设 $d(t_1,t_2) = (d_1(t_1), d_2(t_2))$, d_i 为 $\partial\Omega_i \to \partial\Omega_i$ 的同胚映射 $(i=1,2)$, 我们称 $d(t_1,t_2)$ 是 $\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$ 上的位移.

推论 1 设 $d(t_1,t_2)$ 为 $\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$ 上的位移,则用 $d(t_1,t_2)$ 代替(7)的 (t_1,t_2) 等式仍成立.

4 化非线性问题 O_1 为积分方程问题

定义 2 设 $A_i, B_i, C_i, D_i, (i=1,2)$, $g \in H(\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2, \beta)$, f 在 $\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2 \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A}$ 上连续,我们寻求在 $\Omega_1^{\pm} \times \Omega_2^{+}$, $\Omega_1^{\pm} \times \Omega_2^{-}$ 内广义双正则,在 $\Omega_1^{\pm} \times \Omega_2^{+} + \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$, $\Omega_1^{\pm} \times \Omega_2^{-} + \partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2$ 上连续的函数 $W(x,y)$, 使得 $W(x,\infty) = W(\infty,y) = W(\infty,\infty) = 0$, 并且适合带位移带共轭的边界条件:

$$
\begin{aligned}
& A_1(t_1,t_2)W^{++}(t_1,t_2) + A_2(t_1,t_2)\overline{W^{++}(d(t_1,t_2))} + \\
& \quad B_1(t_1,t_2)W^{+-}(t_1,t_2) + B_2(t_1,t_2)\overline{W^{+-}(d(t_1,t_2))} + \\
& \quad C_1(t_1,t_2)W^{-+}(t_1,t_2) + C_2(t_1,t_2)\overline{W^{-+}(d(t_1,t_2))} + \\
& \quad D_1(t_1,t_2)W^{--}(t_1,t_2) + D_2(t_1,t_2)\overline{W^{--}(d(t_1,t_2))} \\
& = g(t_1,t_2)f(t_1,t_2,W^{++}(t_1,t_2),W^{+-}(t_1,t_2),W^{-+}(t_1,t_2),W^{--}(t_1,t_2), \\
& \quad W^{++}(d(t_1,t_2)),W^{+-}(d(t_1,t_2)),W^{-+}(d(t_1,t_2)),W^{--}(d(t_1,t_2))).
\end{aligned} \tag{8}
$$

我们称以上问题为问题 O_1.

我们将(7)代入(8)式,整理得一积分方程

$$
Q\varphi = \varphi, \tag{9}
$$

其中奇异积分算子

$$\begin{aligned}Q\varphi=&4(A_1+B_1+C_1+D_1)(T_1F_1+T_2F_2-[T_3(F_1D_y)]+\\&(A_1+B_1)(\varphi+P_1\varphi+P_2\varphi+P_3\varphi)+(C_1+D_1)(-\varphi+P_1\varphi-P_2\varphi+P_3\varphi)+\\&(B_1+D_1)(2\varphi-2P_1\varphi)+(1-4B_1)\varphi-4gf+\\&(A_2+B_2+C_2+D_2)\overline{(T_1F_1+T_2F_2-[T_3(F_1D_y)](d)}+\\&(A_2+B_2)\overline{(\varphi+P_1\varphi+P_2\varphi+P_3\varphi)(d)}+(C_2+D_2)\overline{(-\varphi+P_1\varphi-P_2\varphi+P_3\varphi)(d)}+\\&(B_2+D_2)\overline{(2\varphi-2P_1\varphi)}(d)-4B_2\,\overline{\varphi(d)}.\end{aligned}$$

于是问题 O_1 转化为求解奇异积分方程(9).

5 非线性问题 O_1 解的存在性及其积分表达式

引理 3[7] 设 $\varphi(t_1,t_2)\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，则存在与 φ 无关的正常数 J_3，使得 $\|2\varphi+2P_i\varphi\|_\beta\leqslant J_3\|\varphi\|_\beta$，$\|2P_i\varphi\|_\beta\leqslant J_3\|\varphi\|_\beta$，$(i=1,2)$，$\|P_2\varphi\pm P_3\varphi\|_\beta\leqslant J_3\|\varphi\|_\beta$，$\|\pm\varphi\pm P_1\varphi+P_2\varphi+P_3\varphi\|_\beta\leqslant J_3\|\varphi\|_\beta$，$\|\mp\varphi\pm P_1\varphi-P_2\varphi+P_3\varphi\|_\beta\leqslant J_3\|\varphi\|_\beta$.

定理 1 设 $d(t_1,t_2)$ 为 $\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$ 上的位移，且对于任意的 $t',t''\in\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$，有 $|d(t')-d(t'')|\leqslant J|t'-t''|$（$J$ 为正常数）成立，则对于任意 $\varphi\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，有

$$\|\varphi(d(t_1,t_2))\|_\beta\leqslant(1+J^\beta)\|\varphi(t_1,t_2)\|_\beta,\text{其中}(t_1,t_2)\in\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2.$$

定理 2 若 $d(t_1,t_2)$ 如定理 1 中所设，对于任意 $\varphi(x,y)\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，则存在与 φ 无关的正常数 $J_4=(1+J^\beta)J_3$，使 $\|2\varphi(d)+2P_i\varphi(d)\|_\beta\leqslant J_4\|\varphi\|_\beta$，$\|2P_i\varphi(d)\|_\beta\leqslant J_4\|\varphi\|_\beta$，$(i=1,2)$ $\|P_2\varphi(d)\pm P_3\varphi(d)\|_\beta\leqslant J_4\|\varphi\|_\beta$，$\|\pm\varphi(d)\pm P_1\varphi(d)\pm P_2\varphi(d)\pm P_3\varphi(d)\|_\beta\leqslant J_4\|\varphi\|_\beta$，$\|\pm\varphi(d)\pm P_1\varphi(d)-P_2\varphi(d)+P_3\varphi(d)\|_\beta\leqslant J_4\|\varphi\|_\beta$.

定理 3 在定理 1 和引理 2 的条件下，设 $T_1F_1,T_2F_2,[T_3(F_1D_y)],A_i,B_i,C_i,D_i,g\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$，$1>\beta>\alpha=\dfrac{p-m-1}{p}=\dfrac{q-k-1}{q}$，$i=1,2$. 又设 f 关于 $(t_1,t_2)\in\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$ 是 Hölder 连续的，$f(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)=0$，满足

$$\begin{aligned}&|f(t',W_1^{(1)},W_1^{(2)},\cdots,W_1^{(8)})-f(t'',W_2^{(1)},W_2^{(2)},\cdots,W_2^{(8)})|\\&\leqslant J_5|t'-t''|^\beta+J_6|W_1^{(1)}-W_2^{(1)}|+J_7|W_1^{(2)}-W_2^{(2)}|+\cdots+J_{13}|W_1^{(8)}-W_2^{(8)}|.\end{aligned}$$

其中 $J_5,\cdots,J_{13}$ 是与 $t_{1j},t_{2j},W_j^{(1)},\cdots,W_j^{(8)}$ 无关的正常数，$(j=1,2)$. 又设 $A_i,B_i,C_i,D_i(i=1,2)$ 适合：

$$\begin{aligned}\gamma=J_2[&J_3(\|A_1+B_1\|_\beta+\|C_1+D_1\|_\beta+\|B_1+D_1\|_\beta)+\|1-4B_1\|_\beta+\\&J_4(\|A_2+B_2\|_\beta+\|C_2+D_2\|_\beta+\|B_2+D_2\|_\beta)+\|4B_2\|_\beta(1+J^\beta)]<1\end{aligned}$$

且 $\|g\|_\beta<\delta$，$\|T_1F_1+T_2F_2+[T_3(F_1D_y)]\|\beta<\delta$，那么当 $0<\delta<\min\{\dfrac{M(1-\gamma)}{4(\frac{2}{J_3}+J_2(J_{14}+J_{15}M))},1\}$ 时，问题 O_1 可解，解的积分式由(6)给出，M 是给定正数 $(\|\varphi\|_\beta\leqslant M)$，$J_{14},J_{15}$ 是适合 $\|f\|_\beta\leqslant J_{14}+J_{15}\|\varphi\|_\beta$ 的正常数.

证明 记连续函数空间 $C(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2)$ 的子集合：

$$T=\{\varphi|\varphi\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta),\|\varphi\|_\beta\leqslant M\}.$$

先证 Q 是 T 到自身的映射，由 Q 的定义，不等式(2)，引理 3，推论 1，定理 1,2 和题设得

$$\begin{aligned}
&\|Q\varphi\|_\beta \\
&\leqslant 4J_2\|A_1+B_1+C_1+D_1\|_\beta\delta+J_2(\|A_1+B_1\|_\beta+\|C_1+D_1\|_\beta)J_3\|\varphi\|_\beta+ \\
&\quad J_2(\|B_1+D_1\|_\beta J_3+\|1-4B_1\|_\beta)\|\varphi\|_\beta+4J_2\delta\|f\|_\beta+ \\
&\quad 4J_2\|A_2+B_2+C_2+D_2\|_\beta(1+J^\beta)\delta+J_2\|A_2+B_2\|_\beta J_4\|\varphi\|_\beta+ \\
&\quad J_2(\|C_2+D_2\|_\beta+\|B_2+D_2\|_\beta)J_4\|\varphi\|_\beta+J_2\|4B_2\|_\beta(1+J^\beta)\|\varphi\|_\beta \\
&\leqslant \gamma\|\varphi\|_\beta+J_2\left(\frac{4}{J_2J_3}+\frac{4(1+J^\beta)}{J_2J_4}\right)\delta+4J_2\delta(J_{14}+J_{15}M)<M.
\end{aligned}$$

所以 Q 映射集合 T 到自身.

再证 Q 是连续映射. 任取 $\varphi_n\in T$，设 $\{\varphi_n\}$ 于 $\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$ 上一致收敛于 $\varphi(t_1,t_2)$，则对于任给 $\epsilon>0$，那么当 n 充分大时有 $\|\varphi_n-\varphi\|_\beta<\epsilon$. 由文[7]，当 n 充分大时，对任意 $(t_1,t_2)\in\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2$，$|P_i\varphi_n-P_i\varphi|<G\epsilon,(i=1,2,3)$. 由 Q 的定义，上述不等式，引理 7，定理 1，和题设

$$\begin{aligned}
&|Q\varphi_n-Q\varphi| \\
&\leqslant J_1(\|A_1+B_1\|_\beta+\|C_1+D_1\|_\beta)[\|\varphi_n-\varphi\|_\beta+C(P_1\varphi_n-P_1\varphi)+C(P_2\varphi_n- \\
&\quad P_2\varphi)+C(P_3\varphi_n-P_3\varphi)]+J_1(\|B_1+D_1\|_\beta[2\|\varphi_n-\varphi\|_\beta+2C(P_1\varphi_n-P_1\varphi)]+ \\
&\quad J_1\|1-4B_1\|_\beta\|\varphi_n-\varphi\|_\beta+J_1(\|A_2+B_2\|_\beta+\|C_2+D_2\|_\beta)[C((\varphi_n-\varphi)(d))+ \\
&\quad C((P_1\varphi_n-P_1\varphi)(d))+C((P_2\varphi_n-P_2\varphi)(d))+C((P_3\varphi_n-P_3\varphi)(d))]+ \\
&\quad J_1\|B_2+D_2\|_\beta[2C(\varphi_n-\varphi)(d))+2C((P_1\varphi_n-P_1\varphi)(d))]+ \\
&\quad J_1\|4B_2\|_\beta C((\varphi_n-\varphi)(d))+J_1\|g\|_\beta[(J_6+J_7+J_8+J_9)(\|\varphi_n-\varphi\|_\beta+ \\
&\quad C(P_1\varphi_n-P_1\varphi+C(P_2\varphi_n-P_2\varphi)+C(P_3\varphi_n-P_3\varphi))+ \\
&\quad (J_{10}+J_{11}+J_{12}+J_{13})(\|-\varphi_n+\varphi\|_\beta+C((P_1\varphi_n-P_1\varphi)(d))+ \\
&\quad C((P_2\varphi_n-P_2\varphi)(d))+C(P_3\varphi_n-P_3\varphi)(d))] \\
&\leqslant \frac{J_1}{J_2J_3}(1+3G)\epsilon+\frac{J_1}{J_2J_3}(2+2G)\epsilon+\frac{J_1}{J_2}\epsilon+\frac{J_1}{J_2J_4}(\epsilon+3G\epsilon)+ \\
&\quad \frac{J_1}{J_2J_4}(2\epsilon+2G\epsilon)+\frac{J_1}{J_2(1+J^\beta)}\epsilon+J_1\delta(J_6+J_7+\cdots+J_{13})(1+3G)\epsilon \\
&\leqslant M_1\epsilon(M_1\ \text{为一正常数}),
\end{aligned}$$

所以 Q 是映射 T 到自身的连续映射. 依据 Arzela-Ascoli 定理知，T 是连续空间 $C(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2)$ 中的紧集，因此 $Q(T)$ 也是 $C(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2)$ 中的紧集. 再利用 Schauder 不动点定理知至少存在一个 $\varphi_0\in H(\partial\Omega_1\times\partial\Omega_2,\beta)$ 适合(9)，则问题 O_1 至少存在一解，并且以(6)为解的积分表达式.

参考文献：

[1] VAHLEN K T. *über Bewegungen und comlese Zahlen* [J]. Math. Ann., 1902, 55.

[2] BRACK F, DELANGHE R, SOMMEN F. *Clifford Analysis* [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[3] 徐振远. Clifford 代数上正则函数的 Riemann 问题 [J]. 科学通报, 1987.
XU Zhen-yuan. *Riemann problem for regular functions in a Clifford algebra* [J]. Chinese Science Bulletin, 1987. (in Chinese)

[4] WEN Guo-chun. *Clifford analysis and elliptic system, hyperbolic systems of first order equations* [J].

World Scientific(Singapore), 1991, 230-237.

[5] HUANG Sha, LI Sheng-xun. *On oblique derivate problem for generalized regular functions with values in a real Clifford Algebra* [J]. World Scientific(Singapore), 1991, **4**: 80-86.

[6] 黄 沙. Clifford 分析中双正则函数的一个非线性边值问题 [J]. 中国科学, 1996, **36**(3): 227-236; 1996, **39**(1): 1152-1164.
HUANG Sha. *A nonlinear boundary value problem for biregular function in Clifford analysis* [J]. Science in China, 1996, **36**(3): 227—236, 1996, **39**(1): 1152—1164. (in Chinese)

[7] 黄 沙. Clifford 分析中广义双正则函数的(线性)非线性边值问题 [J]. 数学学报, 1997, **40**(6).
HUANG Sha. *A (linear) nonlinear boundary value problem for generalized biregular functions in Clifford analysis* [J]. Science in China, 1997, **40**(6). (in Chinese)

[8] 乔玉英, 黄沙, 赵红芳, 等. Clifford 分析中一类非线性边值问题 [J]. 数学物理学报, 1996, **16**(3): 284-290.
QIAO Yu-ying, HUANG Sha, ZHAO Hong-fang, et. *A nonlinear boundary value problem in Clifford analysis* [J]. Acta. Math. Sci., 1996, **16**(3): 284—290. (in Chinese)

[9] 乔玉英. 双正则函数的非线性带位移边值问题 [J]. 系统科学与数学, 1999, **10**.
QIAO Yu-ying. *A nonlinear boundary value problem with shift for biregular functions* [J]. Jour. of Sys. Sci. Math. Sci., 1999, **10**. (in Chinese)

A Nonlinear Boundary Value Problem with Conjugate Value and a Kind of Shift for Generalized Biregular Functions

XIE Yong-hong, HUANG Sha, QIAO Yu-ying

(College of Mathematics and Information, Hebei Teachers' University, Shijiazhuang, 050016, China)

Abstract: In this paper, we consider generalized biregular functions in Clifford analysis and the nonlinear boundary value problem with conjugate value and a kind of shift. First, Plemelj formula is obtained, then with the help of integral equations and the Schauder fixed-point theorem, we discuss the solvability for the boundary value problem.

Key words: Real Clifford analysis; generalized biregular function; boundary value problem; integral equation.