第21卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 4
2001年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2001

Banach空间中Cauchy初值问题解的存在性*

周友明
(常州技术师范学院基础部，江苏 常州 213015)

摘　要：在研究Banach空间常微分方程Cauchy问题解的存在性问题时，人们常常使用一个很难验证且一般情况下难以达到的条件——一致连续性条件.本文完全不使用一致连续性条件，仅利用紧型条件，获得了Banach空间Cauchy问题解的存在性定理，从而改进和推广了已知的有关结果.

关键词：Cauchy初值问题；紧型条件；闭集上的解.
分类号：AMS(1991) 34G20/CLC O175.8
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0577-04

1　引言及引理

设E是实Banach空间，考虑E中Cauchy初值问题：

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

其中$f\in C[I\times D,E]$，$D\subset E$，$x_0\in D$，$t_0\in I$，I是R^1中某个区间.众所周知，古典的Peano定理在一般的Banach空间中不再成立，所以为了保证问题(1.1)解的存在性，除要求f连续外，还要对f加上其它的条件，通常可以对f施加与紧性测度有关的条件，即所谓的紧型条件，但已往许多结果(见[1],[2],[3])中，不仅对f施加了紧型条件，而且要求f满足一个很难验证且一般难以达到的条件——一致连续性条件.

本文在完全没有使用一致连续性条件，仅利用紧型条件的情况下，获得了问题(1.1)解的存在性定理，改进和推广了文[1],[2],[3]中的一些重要的已知结果.

为了方便起见，引述一个已知结果如下：

引理1.1[4]　设E_1是E的一个可分子空间，$\{x_n(t)\}$是从$[a,b]$到E_1的绝对连续函数列，又设存在$m(t)\in L^1[a,b]$，使得

$$\|x_n(t)\| \leqslant m(t),\ \|x_n'(t)\| \leqslant m(t),\ \text{a.e. } t\in[a,b],\ n=1,2,3,\cdots.$$

令$l(t)=\alpha(\{x_n(t)\mid n=1,2,3,\cdots\})$，$t\in[a,b]$，这里$\alpha(\cdot)$表示$E$中的Kuratowski非紧性测度，则$l(t)$在$[a,b]$上绝对连续，且有$l'(t)\leqslant 2\alpha(\{x_n'(t)\mid n=1,2,3,\cdots\})$，a.e. $t\in[a,b]$.

* 收稿日期：1998-07-16
基金项目：江苏省"青蓝工程"跨世纪学术带头人专项基金资助
作者简介：周友明(1964-)，男，硕士，副教授.

2 主要结论及证明

先考虑 $D=B(x_0,b)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leqslant b\}(b>0)$情形下，问题(1.1)解的存在性.

定理 2.1 设 $f\in C[[t_0,t_0+a]\times B(x_0,b),E]$，$a>0$，且存在常数 $M>0$，使得

$$\|f(t,x)\|\leqslant M,\ \forall\ (t,x)\in[t_0,t_0+a]\times B(x_0,b).$$

又设 $g\in C[[t_0,t_0+a]\times[0,2b],R_+]$，$g(t,0)\equiv 0$，且初值问题 $u'=g(t,u)$，$u(t_0)=0$ 在 $[t_0,t_0+a]$ 上只有零解. 假设

$$\alpha(f(t,S))\leqslant\frac{1}{2}g(t,\alpha(S)),\ \forall\ t\in[t_0,t_0+a],\ S\subset B(x_0,b). \tag{2.1}$$

则对满足 $0<c\leqslant a$，$c<\frac{b}{M}$ 的任何 c，问题(1.1)在 $[t_0,t_0+c]$ 上至少有一个解 $x\in C^1[[t_0,t_0+c],B(x_0,b)]$.

证明 取 $\varepsilon_0>0$，使 $c=\min\{a,\frac{b}{M+\varepsilon_0}\}$，根据文[3]定理3.1.1，存在近似解序列 $x_n(t)\in C^1[[t_0,t_0+c],B(x_0,b)]$，使得

$$\begin{cases}x_n'(t)=f(t,x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0,\\ \|y_n(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{n},\ t\in[t_0,t_0+c],\ n=1,2,3,\cdots.\end{cases} \tag{2.2}$$

从而，根据文[3]定理2.1.1，只需证明 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[[t_0,t_0+c],E]$ 中的相对紧集. 由(2.2)式可得

$$\|x_n'(t)\|\leqslant M+\varepsilon_0,\ t\in[t_0,t_0+c],\ n=1,2,3,\cdots. \tag{2.3}$$

故易知 $\{x_n(t)\}$ 等度连续. 于是，由 Ascoli-Arzela 定理(文[3]定理1.1.3)，只需证明对每个 $t\in[t_0,t_0+c]$，$B_1(t)=\{x_n(t)\mid n=1,2,3,\cdots\}$ 是 E 中相对紧集，即需证明 $l(t)=\alpha(B_1(t))=0$.

令 $B_k(t)=\{x_n(t)\mid n=k,k+1,\cdots\}$，显然

$$\alpha(B_k(t))=\alpha(B_1(t))=l(t),\ k=1,2,3,\cdots.$$

由(2.3)不难知道每个 $x_n(t)$ 在 $[t_0,t_0+c]$ 上绝对连续. 对每个 n，由 $x_n(t)$ 连续性知 $\{x_n(t)\mid t\in[t_0,t_0+c]\}$ 是 E 中的可分集，故 $\{x_n(t)\mid t\in[t_0,t_0+c],n=1,2,3,\cdots\}$ 是 E 中可分集. 用 E_1 表示可分集 $\{x_n(t)\mid t\in[t_0,t_0+c],n=1,2,3,\cdots\}$ 在 E 中张成的闭子空间，则 E_1 是 E 的可分子空间，且 $x_n(t):[t_0,t_0+c]\to E_1$，$n=1,2,3,\cdots$. 又显然有 $\|x_n(t)\|\leqslant\|x_0\|+b$，$t\in[t_0,t_0+c]$，$n=1,2,3,\cdots$. 再注意到(2.3)式，故引理1.1的条件满足，从而 $l(t)$ 在 $[t_0,t_0+c]$ 上绝对连续，且有(并利用(2.2)式和(2.1)式)

$$\begin{aligned}l'(t)&\leqslant 2\alpha(\{x_n'(t)\mid n\geqslant k\})=2\alpha(\{f(t,x_n(t))+y_n(t)\mid n\geqslant k\})\\&\leqslant 2\alpha(\{f(t,x_n(t))\mid n\geqslant k\})+2\alpha(\{y_n(t)\mid n\geqslant k\})\leqslant g(t,\alpha(B_k(t)))+\frac{4\varepsilon_0}{k}\\&=g(t,l(t))+\frac{4\varepsilon_0}{k},\text{a.e. } t\in[t_0,t_0+c],k=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

又由于 $l(t_0)=0<\frac{4\varepsilon_0}{k}$，故

$$l(t)=l(t)-l(t_0)=\int_{t_0}^{t}l'(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{t}(g(s,l(s))+\frac{4\varepsilon_0}{k})\mathrm{d}s$$

$$\leqslant r_k(t),\ t \in [t_0, t_0 + c], k = 1,2,3,\cdots.$$

其中 $r_k(t)$ 表示 $u' = g(t,u) + \frac{4\varepsilon_0}{k}, u(t_0) = \frac{4\varepsilon_0}{k}$ 的最大解. 再根据文[3]定理 1.2.5 以及本定理的假设知, $r_k(t)$ 在 $[t_0, t_0 + c]$ 上一致收敛于零($k \to \infty$). 从而 $l(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_0 + c]$. □

推论 2.1 设 $f \in C[[t_0, t_0 + a] \times B(x_0, b), E]$, 且存在常数 $M > 0$, 使得 $\| f(t,x) \| \leqslant M, \forall\ (t,x) \in [t_0, t_0 + a] \times B(x_0, b)$. 又设存在常数 $L > 0$, 使得

$$\alpha(f(t,S)) \leqslant L\alpha(S),\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + a],\ S \subset B(x_0, b). \tag{2.4}$$

则对满足 $0 < c \leqslant a, c < \frac{b}{M}$ 的任何 c, 问题(1.1)在 $[t_0, t_0 + c]$ 上至少有一个解 $x(t) \in C^1[[t_0, t_0 + c], B(x_0, b)]$.

证明 在定理 2.1 中取 $g(t,u) = 2Lu$ 即获证.

注 2.1 文[1]定理 2.1, 文[3]定理 3.1.1 及系 3.1.1 为保证问题(1.1)解的存在性, 还需进一步假设 f 在 $[t_0, t_0 + a] \times B(x_0, b)$ 上是一致连续的. 本文定理 2.1 和推论 2.1 则完全删掉了"一致连续"这个条件(该条件在文[1],[3]的证明中起着本质和关键作用).

注 2.2 文[3],[5]在讨论问题(1.1)的最大解存在性时, 也使用了 f 一致连续性的条件, 本文的方法表明文[3]定理 5.4.3 中的该条件也是多余的.

下面再讨论问题(1.1)在闭集上解的存在性.

定理 2.2 设 F 是 E 中闭集, $x_0 \in F, f \in C[[t_0, t_0 + a] \times F, E]$, 且存在常数 $M > 0$, 使得 $\| f(t,x) \| \leqslant M, \forall\ (t,x) \in [t_0, t_0 + a] \times F_0$. 其中 $F_0 = F \cap B(x_0, b), b > 0$. 又设 f 满足

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d(x + hf(t,x), F) = 0,\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + a], x \in F.$$

其中 $d(z,F)$ 表示 z 到 F 的距离. 假设

$$\alpha(f(t,S)) \leqslant \frac{1}{2} g(t, \alpha(S)),\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + a], S \subset F. \tag{2.5}$$

其中 $g \in C[[t_0, t_0 + a] \times R_+, R_+], g(t,0) \equiv 0, g(t,u)$ 关于 u 单调增, 且 $u' = g(t,u), u(t_0) = 0$ 在 $[t_0, t_0 + a]$ 上只有零解. 则对满足 $0 < c \leqslant a, c < \frac{b}{M}$ 的任何 c, 问题(1.1)在 $[t_0, t_0 + c]$ 上具有属于 F 的解 $x \in C^1[[t_0, t_0 + c], F_0]$.

证明 利用文献[1]的方法及引理 1.1 类似可证明, 从略.

推论 2.2 在定理 2.2 中, 若将条件(2.5)换成

$$\alpha(f(t,S)) \leqslant L\alpha(S),\ \forall\ t \in [t_0, t_0 + a], S \subset F_0,$$

$L > 0$ 为某常数, 其它条件不变, 则定理 2.2 的结论仍成立.

注 2.3 定理 2.2 是文[1]定理 4.4 的推广.

参考文献:

[1] DEIMLING K. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces* [M]. Springer-Verlag, 1977.

[2] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces* [M]. Pergamon Press, New York, 1981.

[3] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.

GUO Da-jun, SUN Jing-xian. *Drdinary Differential Equations in Abstract Spaces* [M]. Ji'nan: Shandong Sci. Tech. Press, 1989. (in Chinese)

[4] MONCH H, HARTON-VON G F. *On the Cauchy problems for ordinary differential equations in Banach spaces* [J]. Arch Math., 1982, **39**: 153—160.

[5] LAKSHMIKANTHAM V, MITCHELL A R, MITCHELL R W. *Maximal and minimal solutions and comparison results for differential equations in abstract cones* [J]. Ann. Polon. Math., 1977, **34**: 97—104

The Existence of Solutions for Cauchy's Initial Value Problem in Banach Spaces

ZHOU You-ming

(Dept. of Basic Science, Changzhou Teachers' College of Technology, Jiangsu 213015, China)

Abstract: In this paper, the author obtains some existence theorems for Cauchy's initial value problems in Banach spaces. The main characteristic of this paper is that the author do not employ uniform continuity condition. The results in this paper are improvements and generalizations of the known ones.

Key words: Cauchy problem; compactness type conditions; solution in closed set.