第21卷第4期 2001年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 21 No. 4 Nov. 2001

Fréchet 拟基与度量空间的闭映象*

李 进 金

(漳州师范学院数学系，福建 漳州 363000)

摘 要：本文利用林寿引入的 Fréchet 拟基的概念，获得了度量空间的确定闭映象和局部可度量空间的确定闭映象的一些新的刻画.

关键词：Fréchet 空间；cs^* 网；序列网；Fréchet 拟基；闭映射；s-映射.

分类号：AMS(1991) 54D55,54E99,54C10/CLC O189.1

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)04-0581-04

1 引 言

近来，林寿定义了序列网的概念，建立了它与序列拟基，cs^* 网之间的关系，获得了度量空间的确定商映象的一些新刻画. 同时，还给出序列网与Fréchet 拟基的关系，得到了度量空间的闭映象和闭s-映象的两个新的刻画. 本文在此基础上进一步探讨Fréchet 拟基与度量空间的确定闭映象和局部可分度量空间的确定闭映象之间的关系，获得了一些新的刻画，深化了现有的一些结果.

为了叙述的简洁起见，约定：本文所论空间均满足正则和 T_1 分离性公理，映射指连续的满函数. 未提及的概念及符号可见[1].

定义[1] 对空间 X，设空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 满足对每一 $x \in X$ 存在 $\mathscr{P}x \subset \mathscr{P}^\omega$ 具有性质：如果$(P_n) \in \mathscr{P}_x$，那么$\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的下降的网，简记为 $\mathscr{P} \approx \bigcup \{\mathscr{P}_x : x \in X\}$.

(1) $\mathscr{P}$ 称为 X 的序列网，如果 $x \in P \subset X$ 且对任意的$(P_n) \in \mathscr{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$，则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 Fréchet 拟基，如果 $x \in P \subset X$ 且对任意的$(P_n) \in \mathscr{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$，则 P 是 x 在 X 中的邻域.

cs 有限集族 $\mathscr{P}$ 是指对于任意收敛序列 S，$|\{P \in \mathscr{P} : P \cap S \neq \varnothing\}| < \omega$.

闭 Fréchet 拟基，紧 Fréchet 拟基和可分 Fréchet 拟基分别指它的元素都是闭子集，紧子集和可分子集的 Fréchet 拟基.

紧 k 网，紧 cs^* 网，可分 k 网，可分 cs^* 网和闭 k 网也可类似定义.

定理 1 下列条件等价：

(1) X 是度量空间的闭 s-映象.

---

* 收稿日期：1998-12-16

基金项目：福建省教育厅科研基金资助项目(K20106)

作者简介：李进金(1960-)，男，福建省泉州市人，博士，教授.

(2) X 具有 σ- 离散的 Fréchet 拟基.

(3) X 具有 σ- 紧有限的 Fréchet 拟基.

(4) X 具有 σ-cs 有限的 Fréchet 拟基.

(5) X 具有 σ- 局部有限的 Fréchet 拟基.

(6) X 是 $\aleph$- 空间又是 Fréchet 空间.

证明 [1] 定理 3.9 证明了(1)$\Leftrightarrow$(5). 林寿、高智民和 Hattori 独立证明了(1)$\Leftrightarrow$(6).

(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4) 显然.

(4)$\Rightarrow$(6) 由[1] 推论 2.3 及定理 2.4,X 是具有 σ-cs 有限的 cs^* 网的 Fréchet 空间. 由[6] 命题 1.2,X 是具有 σ-cs 有限 k 网的 Fréchet 空间. 由[7] 定理 3,X 是具有 σ- 遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间,又因 X 具有点可数 cs^* 网,所以 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由[8],X 是 $\aleph$- 空间.

(6)$\Rightarrow$(2) 因 X 是 $\aleph$- 空间,由[9]Foged 定理,X 具有 σ- 离散 cs^* 网. 由[1] 定理 2.6,X 具有 σ- 离散的序列网,又因 X 是 Fréchet 空间,由[1] 推论 2.3,X 具有 σ- 离散的 Fréchet 拟基.

定理 2 下列条件等价:

(1) Y 是局部紧度量空间的闭映象.

(2) Y 具有 σ- 遗传闭包保持的紧 Fréchet 拟基.

证明 (2)$\Rightarrow$(1) 由[1] 推论 2.3 及定理 2.4,Y 是具有 σ- 遗传闭包保持的紧 cs^* 网的 Fréchet 空间,由[6] 命题 1.2,Y 是具有 σ- 遗传闭包保持的紧 k 网的 Frechet 空间. 由[10] 推论 3.2,Y 是局部紧度量空间的闭映象.

(1)$\Rightarrow$(2) 设 $f:X\to Y$ 是闭映射,X 是局部紧度量空间,则 X 存在 σ- 局部有限基 $\mathscr{J}$ 且对任意 $B\in\mathscr{J}$,$\overline{B}$ 是紧度量子空间. 令 $\mathscr{P}=\{\overline{B}:B\in\mathscr{J}\}$,则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ- 局部有限的紧序列网. 则 $f(\mathscr{P})$ 是 σ- 遗传闭包保持的紧覆盖. 下面证明 $f(\mathscr{P})$ 是 Fréchet 拟基. 令 $\mathscr{P}\approx\bigcup\{\mathscr{P}x:x\in X\}$. 对每一 $y\in Y$,记 $\mathscr{R}_y=\{(f(P_n)):(P_n)\in\mathscr{P}_x,x\in f^{-1}(y)\}$,则 $\mathscr{R}_y\in f(\mathscr{P})^{\omega}$. 由于 f 的连续性,如果$\langle P_n\rangle$ 是点 x 在 X 中的下降的网,则$\langle f(P_n)\rangle$ 是点 $f(x)$ 在 Y 中的下降的网. 设 $R\subset Y$ 且对任意的 $y\in R$ 及任意的$(R_n)\in\mathscr{R}_y$,存在 $m\in N$ 使得 $R_m\subset R$,那么对任意的 $x\in f^{-1}(R)$ 及任意的$(P_n)\in\mathscr{P}_x$,有 $f(x)\in R$ 且$(f(P_n))\in\mathscr{R}_{f(x)}$,所以存在 $m\in N$ 使得 $f(P_m)\subset R$,于是 $P_m\subset f^{-1}(R)$,因而 $f^{-1}(R)$ 是 X 的序列开集. 又因 X 是度量空间,所以 $f^{-1}(R)$ 是 X 的开集,又因为 f 是闭映射,所以 f 是商映射,从而 R 是 Y 的开集. 因此 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的 Frechet 拟基.

定理 3 下列条件等价:

(1) X 是局部紧度空间的闭 s- 映象.

(2) X 具有 σ- 离散的紧 Fréchet 拟基.

(3) X 具有点可数的紧 Fréchet 拟基.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 由[12] 引理 6,X 是具有 σ- 局部有限的紧 k 网的 Fréchet 空间. 由[10] 定理 2.2,X 是具有 σ- 离散的紧 k 网的 Fréchet 空间. 又因为紧 k 网是 cs^* 网,由[1] 定理 2.6,X 是具有 σ- 离散的紧序列网的 Fréchet 空间. 由[1] 推论 2.3,X 具有 σ- 离散的紧 Fréchet 拟基.

(2)$\Rightarrow$(3) 显然.

(3)$\Rightarrow$(1) 由[1] 推论 2.3 及定理 2.4,X 是具有点可数的紧 cs^* 的 Fréchet 空间. 由[6] 命题 1.2,X 是具有点可数的紧 k 网的 Fréchet 空间,由[11] 定理 3.7,X 是局部紧度空间的闭 s-映象.

推论 1 下面等件等价:

(1) X 是局部紧度量空间的闭 s- 映象.

(2) X 具有 σ- 局部有限的紧 Fréchet 拟基.

(3) X 具有 σ- 局部可数的紧 Fréchet 拟基.

(4) X 具有 σ- 紧有限的紧 Fréchet 拟基.

(5) X 具有星可数的紧 Fréchet 拟基.

定理 4 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭 s- 映象.

(2) X 具有星可数闭 Fréchet 拟基.

(3) X 具有星可数 Fréchet 拟基.

证明 (1)⇒(2) 由[11]定理 3.7,X 是具有星可数闭 k 网的 Fréchet 空间. 因闭 k 网是 cs^* 网,所以 X 是具有星可数闭 cs^* 网的 Fréchet 空间. 由[1]推论 2.3 及定理 2.6,X 具有星可数闭 Fréchet 拟基.

(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 由[1]推论 2.3 及定理 2.4,X 是具有星可数 cs^* 网的 Fréchet 空间. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的星可数 cs^* 网,则 $\mathscr{P}$ 有一个分解 $\{\mathscr{P}_a : a \in A\}$,即 $\mathscr{P} = \bigcup\{\mathscr{P}_a : a \in A\}$,并且对于任意的 $a, \beta \in A, a \neq \beta, (\bigcup \mathscr{P}_a) \cap (\bigcup \mathscr{P}_\beta) = \varnothing$. 令 $X_a = \bigcup \mathscr{P}_a$,则 X 是 $\{X_a, a \in A\}$ 的拓扑和. 从而 $\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数 cs^* 网. 又因 X 是 Fréchet 空间,由[6]命题 1.2,X 是具有局部可数 k 网的 Fréchet 空间,由[13]定理 2,X 是局部可分度量空间的闭 s 映象.

近来,林寿,刘川和戴牧民获得了局部可分度量空间的闭 s- 映象的一个精巧的特征[15]:X 是局部可分度量空间的闭 s- 映象当且仅当 X 是具有点可数的可分 cs^* 网的 Fréchet 空间. 结合[1]定理 4 及推论 2.3,有:

定理 5 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭 s- 映象.

(2) X 具有 σ- 局部有限的可分 Fréchet 拟基.

(3) X 具有 σ- 紧有限的可分 Fréchet 拟基.

(4) X 具有点可数的可分 Fréchet 拟基.

证明 (1)⇒(2) 由[14]定理 6,X 是具有 σ- 局部有限的可分 k 网的 Fréchet 空间,因而,X 是具有 σ- 局部有限的可分闭 k 网的 Fréchet 空间,因闭 k 网是 cs^* 网,所以,由[1]推论 2.3 及定理 2.6,X 具有 σ- 局部有限的可分 Fréchet 拟基.

(2)⇒(3)⇒(4) 显然.

(4)⇒(1) 由[1]推论 2.3 及定理 2.4,X 是具有点可数的可分 cs^* 网的 Fréchet 空间,由[15]定理 2.7,X 是局部可分度量空间的闭 s- 映象.

定理 6 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭映象.

(2) X 具有 σ- 遗传闭包保持的可分 Fréchet 拟基.

证明 (1)⇒(2) 设存在局部可分度量空间 M 和闭映射 $f: M \to X$. 显然,X 是 Frechet 空间,让 $\mathscr{P}$ 是 M 的 σ- 局部有限基且对任意 $P \in \mathscr{P}$,P 是 M 的可分子空间,则 $f(\mathscr{P}) = \{f(P) : P \in \mathscr{P}\}$ 是 X 的由可分子空间组成的 σ- 遗传闭包保持集族. 因 $\mathscr{P}$ 是 M 的序列网,f 是闭映射,由定理 2 的证明可知 $f(\mathscr{P})$ 是 X 的 Fréchet 拟基. 因此,X 具有 σ- 遗传闭包保持的可分 Fréchet 拟基.

(2)⇒(1) 由[1]推论 2.3 及定理 2.4,X 是具有 σ- 遗传闭包保持的可分 cs^* 网的 Frechet

空间. 由[6]命题1.2,X是具有σ-遗传闭包保持的可分k网的Fréchet空间. 由[15]定理4.2,X是局部可分度量空间的闭映象.

参考文献：

[1] 林 寿. 序列网与度量空间的序列商映象[J]. 数学学报, 1999, **42**: 49—54.
LIN Shou. *Sequential networks and the sequantially quotient images of metric spaces* [J]. Acta. Math. Sinica, New Series, 1999, **42**: 49—54. (in Chinese)

[2] FRANKLIN S P. *Spaces in which sequences suffice* [J]. Fund. Math., 1965, **57**: 107—115.

[3] GAO Zhi-min. *$\aleph$-space is invariant under perfect mappings* [J]. Q & A in Gen. Top., 1987, **5**: 271—279.

[4] GAO Zhi-min, HATTORI Y. *A characterization of closed s-images of metric spaces* [J]. Q & A in Gen. Top., 1986/87, **4**: 147—151.

[5] LIN Shou. *Mapping theorem on $\aleph$-spaces* [J]. Top. Appl., 1988, **30**: 159—164.

[6] TANAKA Y. *Point-countable covers and k-networks* [J]. Top. Proc., 1987, **12**: 323—349.

[7] LIU Chuan. *Spaces with a σ-compact finite k-networks* [J]. Q & A in Gen. Top., 1992, **10**: 81—87.

[8] JUNNILA H J K, YUN Zi-qiu. *$\aleph$-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure preserving k-network* [J]. Top. Appl., 1992, **44**: 209—215.

[9] FOGED L. *Characterizations of $\aleph$-spaces* [J]. Paciffic J. Math., 1984, **110**: 59—63.

[10] LIN Shou. *On spaces with a k-network consisting of compact subsets* [J]. Top. Proc., 1995, **20**: 185—190.

[11] IKEDA Y, TANAKA Y. *Spaces having star-countable k-networks* [J]. Top. Proc., 1993, **18**: 107—132.

[12] TANAKA Y. *Closed maps of metric spaces* [J]. Top. Appl., 1982, **11**: 87—92.

[13] LIN Shou. *Spaces with a locally countable k-network* [J]. Northeastern Math. J., 1990, **6**(1): 39—44.

[14] LIU Chuan, TANAKA Y. *Spaces with certain compact-countable k-networks and questions* [J]. Q & A in Gen. Top., 1996, **14**: 15—38.

[15] LIN Shou, LIU Chuan, DAI Mu-min. *Images on locally separable metric spaces* [J]. Acta. Math. Sinica, New Series, 1997, **13**(1): 1—8.

Fréchet Quasi-Bases and the Closed Images of Metric Spaces

LI Jin-jin

(Dept. of Math., Zhangzhou Teachers' College, Fujian 363000, China)

Abstract: In this paper the concept of Fréchet quasi-base, which is introduced by Lin Shou, is used, some new characterizations of the certain closed images of metric spaces and locally separable metric spaces are obtained.

Key words: Fréchet quasi-base; cs^*-network; sequential network; closed map; s-mapping.