第21卷第4期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 4
2001年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2001

广义谢尔宾斯基海绵的Packing测度*

古伟清[1]， 曾文曲[2]

(1. 广东工业大学数学系，广州 510643， 2. 广东工业大学研究生处，广州 510090)

摘 要：讨论了三维欧氏空间上的一类自仿射集——广义谢尔宾斯基(Sierpinski)海绵的填充测度(Packing Measure)，对 $\varphi(t)=t^{\theta},\varphi(t)=\frac{t^{\theta}}{|\log t|}$ 及更一般的情况，证明了填充测度 $P_{\varphi}[K(T,D)]$ 为无穷或有限的条件.

关键词：填充测度；自仿射集；谢尔宾斯基海绵；维数.

分类号：AMS(1991) 28A80/CLC O189.12，O174.12

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2001)04-0593-07

1 定义及主要结果

定义 1 设 $\varphi:[0,\infty)\to R,\varphi(0)=0$ 是任意给定的增函数，对距离空间的任一集合 E，称

$$\widetilde{P}_{\varphi}(E)=\lim_{\epsilon\to 0}[\sup\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\mathrm{diam}B_j)] \tag{1}$$

为集合 E 的在测度函数 φ 下的填充预测度(Packing premeasure)，式中右端是对所有球心在 E 中，且直径 $\mathrm{diam}B_j<\epsilon$ 的不相交的闭球的集合 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ 求上确界.

定义 2 称

$$P_{\varphi}(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{P}_{\varphi}(E_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\} \tag{2}$$

为集合 E 在测度函数 φ 下的 Packing 测度，特别，当 $\varphi(t)=t^{\theta}$ 时，我们把 P_{φ} 记为 P_{θ}.

有了 Packing 测度的概念，可以定义集合 E 的 Packing 维数 $\dim_P(E)$，即 $\dim_P(E)=\inf\{\theta:P_{\theta}(E)=0\}$，且有结果[1]：$\dim_H(E)\leqslant\dim_P(E)\leqslant\overline{\dim}_M(E)$，式中，$\dim_H(E)$ 和 $\overline{\dim}_M(E)$ 分别为集合 E 的 Hausdorff 维数和 Minkowski 维数，由此可见讨论集合 E 的 Packing 测度是有意义的.

给定整数 $1\leqslant l\leqslant m<n$ 和集合 $D\subset\{0,1,\cdots,n-1\}\times\{0,1,\cdots,m-1\}\times\{0,1,\cdots,l-1\}$，$T=\begin{bmatrix}n&0&0\\0&m&0\\0&0&l\end{bmatrix}$，记

* 收稿日期：1998-10-12

基金项目：广东省高教厅重点课题资助项目(990044)

作者简介：古伟清(1954-)，男，副教授.

E-mail：gdgggwq@21cn.com

$$K(T.D)=\{\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}n^{-k} & 0 & 0\\ 0 & m^{-k} & 0\\ 0 & 0 & l^{-k}\end{pmatrix}d_k;d_k\in D\},\tag{3}$$

则 $K(T,D)$ 是三维欧氏空间上的自仿射集,[1]称之为广义谢尔宾斯基海绵.

分别用 $\pi_1(D)$,$\pi_2(D)$ 表示集合 D 到第二坐标和第三坐标的投影,$|D|$ 表示集合 D 的基数(集合 D 的元素的个数).

定义 3 设 $D\subset\{0,1,\cdots,n-1\}\times\{0,1,\cdots,m-1\}\times\{0,1,\cdots,l-1\}$,如果在 D 中对任意的 $z\in\pi_2(D)$,原像 $\pi_2^{-1}(D)$ 的基数相等,即对任意的 $z_1,z_2\in\pi_2(D)$,$|\pi_2^{-1}(z_1)|=|\pi_2^{-1}(z_2)|$,则称 D 有相同水平的纤维,否则称 D 有不同水平的纤维. 记 $\beta=\frac{\log n}{\log m}$, $\alpha=\frac{\log n}{\log l}$,则有 $\alpha\geqslant\beta>1$.

主要结果:

定理 1 各符号意义如前所述,设

$$\theta=\log_n(|D||\pi_1(D)|^{\beta-1}|\pi_2(D)|^{\alpha-1}).\tag{4}$$

(i) 如果 D 有不同水平的纤维,则 $P_\theta[K(T,D)]=\infty$,且 $K(T,D)$ 对 P_θ 不是 σ- 有限.

(ii) 如果 D 有相同水平的纤维,则 $0<P_\theta[K(T,D)]<\infty$.

定理 2 各符号意义如前所述,设 D 有不同水平的纤维,

(i) 若 $\varphi(t)=\frac{t^\theta}{|\log t|}$,或更一般地,对 $\varphi(t)=\frac{t^\theta}{|\log t|}\psi(\log\log|\log t|)$,其中 ψ 是有界的单调减函数,及 $\int_0^\infty\psi(u)\mathrm{d}u=\infty$,则 $P_\varphi[K(T,D)]=\infty$.

(ii) 若 $\varphi(t)=\frac{t^\theta}{|\log t|^{1+\epsilon}}(\epsilon>0)$,或更一般地对 $\varphi(t)=\frac{t^\theta}{|\log t|}\psi(\log|\log t|)$,其中 ψ 是有界的单调减函数,及 $\int_0^\infty\psi(u)\mathrm{d}u<\infty$,则 $P_\varphi[K(T,D)]=0$.

2 若干引理与概念

设 $\{f_j\}_{j=1}^l$ 是一个完备距离空间上的收缩映射,则存在一个唯一紧集 K,使满足[2]

$$K=\bigcup_{j=1}^{l}f_j(K).\tag{5}$$

引理 1[3] 设 $\{f_1,\cdots f_l\}$ 是完备距离空间上的收缩李卜希兹映射,即对任意的两点 x,y 及 $1\leqslant j\leqslant l$,满足 $\epsilon_jd(x,y)\leqslant d(f_j(x),f_j(y))\leqslant r_jd(x,y)$. 其中 $0<\epsilon_j\leqslant r_j<1$,$d(x,y)$ 表示两点间的距离,用 K 表示满足式(5)的紧集,则

(i) $\dim_P(K)=\overline{\dim}_M(K)$;

(ii) 对任意的测度函数 φ,$\widetilde{P}_\varphi(K)<\infty$,从而 K 对 P_φ 是 σ- 有限的.

引理 2 (i) 自仿射集 $K(T,D)$ 有相同的 Packing 维数和 Minkowski 维数.

(ii) 若对某一测度函数 φ,有 $\widetilde{P}_\varphi[K(T,D)]=\infty$,则 $K(T,D)$ 有无限的、非 σ- 有限的 P_φ 测度.

引理 3[4] 设 μ 是一个 R^n 上的 Boral 概率测度,$E\subset R^n$,且 $\mu(E)>0$,给定一个测度函数

φ,以及用 $B(z,\varepsilon)$ 表示球心为 z 半径为 ε 的球,

(i) 对 $\forall z\in E$,及 $0<\varepsilon<1$,如果 $0<c_1\leqslant\dfrac{\mu|B(z,\varepsilon)|}{\varphi(2\varepsilon)}\leqslant c_2<\infty$,则 $0<P_\varphi(E)<\infty$.

(ii) 对 $\forall z\in E$,如果 $\limsup\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{\varphi(\varepsilon)}{\mu|B(z,\varepsilon)|}$,则 $P_\varphi(E)=0$.

上述引理 1 和引理 3 的证明见参考文献[3],[4],引理 2 可由引理 1 推出. 下面我们给出近似立方体的概念,设

$$\omega=(x_1,x_2,\cdots,x_r;y_1,y_2,\cdots,y_{[\beta r]};z_1,z_2,\cdots,z_{[\alpha r]}),\tag{6}$$

其中,当 $1\leqslant i\leqslant r$,有 $\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{pmatrix}\in D$. 对 $r<i\leqslant[\beta r]$ 和 $r<j\leqslant[\alpha r]$,则 $y_i\in\pi_1(D),z_j\in\pi_2(D)$.

把所有满足式(6) 的 ω 的集合记为 Ω_r. 对任意的 $\omega\in\Omega_r$,用 $Q(\omega)$ 表示所有满足下述条件的点的集合:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_in^{-i},\sum_{i=1}^{\infty}y_im^{-i},\sum_{i=1}^{\infty}z_il^{-i},\right).\tag{7}$$

在式(7)中,满足 $(x_1,x_2,\cdots,x_r;y_1,y_2,\cdots,y_{[\beta r]};z_1,z_2,\cdots,z_{[\alpha r]})=\omega$,且对 $\forall i\geqslant1$,有 $0\leqslant x_i<n,0\leqslant y_i<m,0\leqslant z_i<l$,则 $Q(\omega)$ 近似为一个立方体,我们称之为 r 级的近似立方体,$Q(\omega)$ 的长,宽,高分别为 $n^{-r},m^{-[\beta r]},l^{-[\alpha r]}$ 且满足 $n^{-r}\leqslant m^{-[\beta r]}\leqslant mn^{-r}$ 及 $n^{-r}\leqslant l^{-[\alpha r]}\leqslant ln^{-r}$.

对于 $Q(\omega)$中的任意两点 p_1,p_2 的距离,有

$$|p_1p_2|\leqslant\sqrt{(n^{-r})^2+(m^{-[\beta r]})^2+(l^{-[\alpha r]})^2}\leqslant\sqrt{(n^{-r})^2+(mn^{-r})^2+(ln^{-r})^2}<2n^{1-r}.$$

因此近似立方体的直径满足 $n^{-r}\leqslant diam[Q(\omega)]\leqslant2n^{1-r}$,原则上,所谓 $K(T,D)$ 的 r 级填充,可由球心为 $K(T,D)$ 的点且包含在每个 r 级的近似立方体的极大球所构成,然而对某些集合 D,不能排除 $K(T,D)$ 的所有点都位于近似立方体的边界附近(如果 D 的所有元素 — 亦即选取"留下的块"在同一平行于某坐标平面的平面上时,就会发生这种情况),此时就不能用上述方法得到 $K(T,D)$ 的填充. 为了解决这个问题,我们考虑给 D 一些约束条件.

记号:对由式(6) 给出的 ω,记 $X_i(\omega)=x_i,1\leqslant i\leqslant r;Y_i(\omega)=y_i,1\leqslant i\leqslant[\beta r];Z_i(\omega)=z_i,1\leqslant i\leqslant[\alpha r]$.

假设集合 D 不包含在一平行于坐标平面的平面内,则存在(ξ,η,ζ) 和$(\xi',\eta',\zeta')\in D$. 使 $\xi\neq\xi',\eta\neq\eta',\zeta\neq\zeta'$.

记 $\tilde{\Omega}_r=\{\omega\in\Omega_r:Y_{r+1}=\eta,Y_{r+2}=\eta',Z_{r+1}=\zeta,Z_{r+2}=\zeta'\}$,则集合 $\tilde{\Omega}_r$ 的基数为 $|\tilde{\Omega}_r|=|D|^r|\pi_1|^{[\beta r]-r-2}|\pi_2|^{[\alpha r]-r-2}$.

引理 4 对任意的 $\omega\in\tilde{\Omega}_r$,近似立方体 $Q(\omega)$ 包含一个球心为 $K(T,D)$ 中的点的开球 $B(\omega)$,且 $\mathrm{diam}[B(\omega)]>n^{-r-2}$.

证明 设 $\omega\in\tilde{\Omega}_r$,选择一个点

$$(x,y,z)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_kn^{-k},\sum_{k=1}^{\infty}y_km^{-k},\sum_{k=1}^{\infty}z_kl^{-k}\right)\in K(T,D),$$

且 $x_{r+1}=\xi,x_{r+2}=\xi',y_{r+1}=\eta,y_{r+2}=\eta',z_{r+1}=\zeta,z_{r+2}=\zeta'$,因 $\omega\in\tilde{\Omega}_r$,这样的选择是可能的,这样$(x,y,z)$ 到 $Q(\omega)$ 的边界的距离至少是 n^{-r-2}. 所以$(x,y,z)\in K(T,D)$ 为开球 $B(\omega)$ 的中心,则 $\mathrm{diam}[B(\omega)]>n^{-r-2}$,证毕.

有了这个引理,可以得到 $K(T,D)$ 的填充,且每个球的直径大于或等于 n^{-r-2}.

引理 5[5] 设 $\{W_i\}_{i=1}^N$ 是取值在 $[0,1]$ 内的独立随机变量,记 $A_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N W_i$,则对 $\forall\ \epsilon>0$, $P[A_N-E(A_N)>\epsilon]\leqslant e^{-\frac{N\epsilon^2}{2}}$,其中 $E(A)$ 是数学期望.

3 定理的证明

定理 1 的证明 (i) 对每一个 $r\geqslant 1$,考察集合

$$\tilde{\Omega}_r=\{\omega\in\Omega_r: Y_{r+1}=\eta, Y_{r+2}=\eta', Z_{r+1}=\zeta, Z_{r+2}=\zeta'\}.$$

设 v_r 是 $\tilde{\Omega}_r$ 上的正规的计数测度,则 Z_i 是 $\langle\tilde{\Omega}_r, v_r\rangle$ 上的随机变量,注意到 D 有不同水平的纤维,因此可选取适当的集合 $A\subset\pi_2(D)$,使其满足式(8),(9),(10).

$$v_r\{\omega\in\tilde{\Omega}_r: Z_i(\omega)\in A\}\geqslant\frac{1}{2},\quad r+2\leqslant i\leqslant[\alpha r], \tag{8}$$

且设在集合 A 去掉任意一个元素得到的集合为 A_1,有

$$v_r\{\omega\in\tilde{\Omega}_r: Z_i(\omega)\in A_1\}<\frac{1}{2},\quad r+2\leqslant i\leqslant[\alpha r], \tag{9}$$

$$v_r\{\omega\in\tilde{\Omega}_r: Z_i(\omega)\in A\}\leqslant\frac{1}{2},\quad 1\leqslant i\leqslant r. \tag{10}$$

当 A 选定之后,进一步我们设 $\{r(j)\}_{j=1}^J$ 是一个对所有 j 都满足 $\alpha r(j)<r(j+1)$ 的整数递增序列,定义归纳集 $\Omega^*_{r(j)}$ 如下:$\Omega^*_{r(j)}$ 由所有属于 $\tilde{\Omega}_{r(j)}$ 且满足:

$$\sum_{i=r(j)+3}^{[\alpha r(j)]}1_{(Z_i(\omega)\in A)}-\sum_{i=r(j)+3}^{[\alpha r(j)]}1_{(Z_i(\omega)\notin A)}\geqslant 0, \tag{11}$$

$$\sum_{i=r(k)+3}^{[\alpha r(j)]}1_{(Z_i(\omega)\in A)}-\sum_{i=r(k)+3}^{[\alpha r(j)]}1_{(Z_i(\omega)\notin A)}<0, \tag{12}$$

的 ω 所组成,式中 k 满足 $1\leqslant k\leqslant j$. 第一步,选择足够大的 $r(1)$,使

$$v_{r(1)}[\Omega^*_{r(1)}]=v_{r(1)}\{\omega\in\Omega^*_{r(1)}: Z_i(\omega)\in A\}\geqslant\frac{1}{2}.$$

由式(8) 及大数定理,这样的 $r(1)$ 是存在的,此时也必满足式(11). 下一步,取 $r(2)>\beta r(1)$,且满足式(11) 和式(12),注意到式(8) 与式(10) 的成立,保证了这个 $r(2)$ 也是存在的,且有 $v_{r(2)}[\Omega^*_{r(2)}]\geqslant\frac{1}{2}$. 用这种方法做下去,可得集合 $\Omega^*_{r(j)}$,满足对任意的 $j\leqslant J$,均有 $v_{r(j)}[\Omega^*_{r(j)}]\geqslant\frac{1}{2}$. 另一方面,考察填充 $\{B(\omega):\omega\in\tilde{\Omega}_r\}$,对任意的 r,由引理 4

$$\sum_{\omega\in\tilde{\Omega}_r}[\mathrm{diam}B(\omega)]^\theta\geqslant|\tilde{\Omega}_r|n^{-(r+2)\theta}=|D|^r|\pi_1(D)|^{[\beta r]-r-2}|\pi_2(D)|^{[\alpha r]-r-2}n^{-(r+2)\theta},$$

注意 $n^{-r\theta}=|D|^{-r}|\pi_1(D)|^{-(\beta-1)r}|\pi_2(D)|^{-(\alpha-1)r}$, 代入上式,即可得

$$\sum_{\omega\in\tilde{\Omega}_r}[\mathrm{diam}B(\omega)]^\theta\geqslant c. \tag{13}$$

式中 c 为常数. 注意由式(11) 及(12),对任意的 $\omega\in\Omega^*_{r(j)}$ 和 $\omega'\in\Omega^*_{r(k)}$,$(j\neq k)$. 近似立方体 $Q(\omega)$ 和 $Q(\omega')$ 有不相交的内部. 因此并集 $\bigcup_{j=1}^J\{B(\omega):\omega\in\Omega^*_{r(j)}\}$ 为 $K(T,D)$ 的一个填充,在式

(13) 中,取 $r = r(j)$,即得

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{\omega\in\Omega^*_{r(j)}}[\mathrm{diam}B(\omega)^\theta] \geqslant \frac{Jc}{2}. \tag{14}$$

于是即可得 $\widetilde{P}_\theta(K(T,D)) \geqslant \frac{Jc}{2}$, 由于 J 是任意的,$\widetilde{P}_\theta(K(T,D)) = \infty$, 由引理 2, 得到 $P_\theta(K(T,D)) = \infty$,即 $K(T,D)$ 对 P_θ 不是 σ- 有限.

(ii) 设 $(\widetilde{X}_i,\widetilde{Y}_i,\widetilde{Z}_i)(i\geqslant 1)$ 为 D 上有相同分布的随机变量,用 μ 表示 $(\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{X}_i n^{-i},\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{Y}_i m^{-i},\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{Z}_i l^{-i})$ 的分布,则 μ 是一个 $K(T,D)$ 上的概率测度,若 D 有相同水平的纤维,则对 $\omega\in\Omega_r$ 确定的每一个近似立方体 $Q(\omega)$ 有相同的质量

$$\mu[Q(\omega)] = \frac{1}{|\Omega|} = \left(\frac{|D|}{|\pi_1(D)|}\right)^{[\beta r]-r}\left(\frac{|D|}{|\pi_2(D)|}\right)^{[\alpha r]-r}|D|^{r-([\beta r]+[\alpha r])}$$

设 $p\in K(T,D)$ 和 $B(p,\varepsilon)$ 是以 p 为中心 ε 为半径的闭球,选择一个整数 r,使 $2n^{1-r} < \varepsilon \leqslant n^{2-r}$,则存在 $\omega\in\Omega_r$,使 $p\in Q(\omega)\subset B(p,\varepsilon)$, 因此

$$\begin{aligned}\mu[B(p,\varepsilon)] &\geqslant \left(\frac{|D|}{|\pi_1(D)|}\right)^{[\beta r]-r}\left(\frac{|D|}{|\pi_2(D)|}\right)^{[\alpha r]-r}|D|^{r-([\beta r]+[\alpha r])}\\ &= |D|^{-r}|\pi_1(D)|^{r-[\beta r]}|\pi_2(D)|^{r-[\alpha r]}\\ &\geqslant |D|^{-r}|\pi_1(D)|^{r-\beta r}|\pi_2(D)|^{r-\alpha r} = n^{-r\theta}.\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon\leqslant n^{2-r}, n^{-r}\geqslant \varepsilon n^{-2}, n^{-r\theta}\geqslant n^{-2\theta}\varepsilon^\theta$,故

$$\mu[\beta(p,\varepsilon)] \geqslant n^{-r\theta} \geqslant n^{-2\theta}\varepsilon^\theta. \tag{15}$$

另一方面, $B[p,\varepsilon]\cap K(T,D)$ 可以给有限个近似立方体 $Q(\omega)$ 覆盖, $\omega\in\Omega_r$. 所以存在常数 c_1, c_1', c_2 使

$$\mu[B(p,\varepsilon)] \leqslant c_1\mu[Q(\omega)] = \frac{c_1}{\Omega_r} \leqslant c_1' n^{-r\theta} \leqslant c_2\varepsilon^\theta, \tag{16}$$

由引理 3 及不等式(15)(16),所以 $0 < P_\theta[K(T,D)] < \infty$. □

定理 2 的证明 (i) 记 $a(k) = \sum_{0\leqslant i\leqslant n}\sum_{1,0\leqslant j\leqslant m-1} 1_{(i,j,k)\in D} = |\pi_2^{-1}(k)|$,设 D 有不同水平的纤维,故可选取 $\eta_1\in\pi_2(D)$,使 $\frac{a(\eta_1)}{|D|} < \frac{1}{\pi_2(D)}$,再选取 $\delta > 0$,使

$$\frac{a(\eta_1)}{|D|} + \delta < \frac{1}{\pi_2(D)} - \delta. \tag{17}$$

设 $r(h) = \bar{c}h\log h$,式中 $\bar{c}$ 为稍后确定的常数. 给出 $\omega\in\widetilde{\Omega}_r$ 和 $\varepsilon < t \leqslant [\alpha r]$,记

$$A(s,t,\omega) = \frac{1}{t-s}\sum_{k=s+1}^{t} 1_{z_k=\eta_1}, \tag{18}$$

则 $A(s,t,\omega)$ 为区间 $(s,t]$ 中 ω 的 z 坐标等于 η_1 的频率, $A(s,t,\omega)$ 为 $\langle\widetilde{\Omega},v_r\rangle$ 上的随机变量. 下一步,固定一个整数 h_1 和定义归纳集 $\Gamma_{r(h)}$ 如下:对 $h > h_1$,集合 $\Gamma_{r(h)}$ 由所有属于 $\widetilde{\Omega}_{r(h)}$ 且满足下式的 ω 组成

$$A(r(h)+2, r(h+1),\omega) < \frac{a(h_1)}{|D|} + \delta \tag{19}$$

及对所有的 $h_1 \leqslant k < h$,

$$A(r(k)+2, r(k+1), \omega) < \frac{1}{|\pi_2(D)|} - \delta. \tag{20}$$

可见对任意的 r

$$v_r[Z_k(\omega)=\eta_1] = \begin{cases} \frac{a(\eta_1)}{|D|}, & k \leqslant r \\ \frac{1}{|\pi_2(D)|}, & r+2 < k \leqslant [\alpha r]. \end{cases} \tag{21}$$

由引理 5，有

$$v[A(r(h)+2, r(h+1), \omega) > \frac{a(\eta_1)}{|D|} + \delta] \leqslant \exp[-(r(h+1)-r(h)-2)\frac{\delta^2}{2}].$$

注意到 $r(h)=\tilde{c}h\log h$，所以上式右边至多是 $\exp[-\frac{\tilde{c}\delta^2}{4}\log h] = h^{-\frac{\tilde{c}\delta^2}{4}}$，由归纳集 $\Gamma_{r(h)}$ 的定义，即可得：$v_r(h)[\tilde{\Omega}_{r(h)} - \Gamma_{r(h)}] \leqslant \sum_{k=h_1}^{h} k^{-\frac{\tilde{c}\delta^2}{4}}$. 由上式可见，选取充分大的 $\tilde{c}$ 和 h_1，则可使对任意的 $h \geqslant h_1$，有 $v_{r(h)}[\Gamma_{r(h)}] \geqslant \frac{1}{2}$.

考察条件(19)和(20)，还可看到如果 $\omega \in \Gamma_{r(h)}$ 和 $\omega' \in \Gamma_{r(k)}$，$h \neq k$，则近似立方体 $Q(\omega)$ 与 $Q(\omega')$ 有不相交的内部，因此 $\bigcup_{h=h_1}^{\infty}\{B(\omega): \omega \in \Gamma_{r(h)}\}$ 是 $K(T,D)$ 的最大直径至多为 $2n^{1-r(h)}$ 的填充，由引理 1，此处圆球 $B(\omega) \subset Q(\omega)$，应用测度函数到这个填充，得

$$\sum_{h=h_1}^{\infty}\sum_{\omega\in\Gamma_{r(h)}} \varphi(\mathrm{diam}B(\omega)) \geqslant \sum_{h=h_1}^{\infty}\frac{1}{2}|\tilde{\Omega}_{r(h)}|\varphi(n^{-(r(h)+2)})$$

$$\geqslant c_1\sum_{h=h_1}^{\infty} n^{r(h)\theta}\varphi(n^{-(r(h)+2)}). \tag{22}$$

(式中的 c_1 及以下的 c_i 均为常数) 注意到 $\varphi(t) = \frac{t^\theta}{|h\log h|}\psi(\log\log|\log t|)$ 及 ψ 单调递减，所以式(22)右端

$$c_1\sum_{h=h_1}^{\infty} n^{r(h)\theta}\varphi(n^{-(r(h)+2)}) \geqslant c_2\sum_{h=h_1}^{\infty}\frac{1}{h\log h}\psi(\log\log h). \tag{23}$$

由假设 $\int_{h_1}^{\infty}\frac{\psi(\log\log x)}{x\log x}\mathrm{d}x = \int_{\log\log h_1}^{\infty}\psi(u)\mathrm{d}u = \infty$，于是由式(23)，即可得 $\tilde{P}_\varphi(K)=\infty$，由引理 2，$P_\varphi(K)=\infty$.

(ii) 设 Λ 是任意的中心在 $K(T,D)$ 的不相交球的集合，按照 Λ 的直径大小分解 $\Lambda_r = \{B \in \Lambda: 4n^{1-r} < \mathrm{diam}B < 4n^{2-r}\}$，此时，对 $\forall\ \omega \in \Omega_r$，则最多一个 B_j 的中心落在近似立方体 $Q(\omega)$ 内，且有 $|\Lambda_r| \leqslant |\Omega_r| = |D|^r|\pi_1(D)|^{[\beta r]-r}|\pi_2(D)|^{[\alpha r]-r} \leqslant |D|^r|\pi_1(D)|^{(\beta-1)r}|\pi_2(D)|^{(\alpha-1)r} = n^{r\theta}$.

因此，给定 $\varphi(t) = \frac{t^\theta}{|\log t|}\psi(\log|\log t|)$，注意到定理的条件有

$$\sum_{B\in\Lambda_r}\varphi(\mathrm{diam}\ B) \leqslant n^{r\theta}\varphi(4n^{2-r}) = c_3\frac{\psi(\log|\log 4n^{2-r}|)}{|\log 4n^{2-r}|} \leqslant c_4\frac{\psi(\log r)}{r},$$

所以 $\sum_{B\in\Lambda}\varphi(\mathrm{diam}\ B) \leqslant c_4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\psi(\log r)}{r} \leqslant c_5\int_t^{\infty}\frac{\psi(\log x)}{x}\mathrm{d}x = c_5\int_{\log t}^{\infty}\psi(u)\mathrm{d}u.$

令 $t\to\infty$ 和应用 ψ 的可积性，即得 $\bar{P}_{\varphi}K(T,D)=0$，从而 $P(K(T,D))=0$. 类似地，对 $\varphi(t)=\frac{t^{\theta}}{|\log t|^{1+\epsilon}}$ 的情况也可同样证明. $\square$

参考文献：

[1] FALCONER K. *Fractal Geometry* [M]. John Wiley and Sons, 1990, 47—49, 126—132.

[2] HUTCHINSON J E. *Fractals and self-similarty* [J]. Indiona University Math J., 1981, **30**: 713—747.

[3] PERES Y. *The packing measure of self-affine carpets math* [J]. Proe. Camb. Philsor, 1994, **115**: 437—450.

[4] SACNT X R and TRICOT C. *Packing regularity of sets in n-space math* [J]. Proe Cambridge Phil Soc., 1988, **103**: 133—145.

[5] HOEFFDING W. *Probability in equalities for sums of bounded random vatiables* [J]. J. Amer Statist. Assoc, 1963, **58**: 13—30.

The Packing Measure of the Generalized Sierpinski Sponge

GU Wei-qing[1],　ZENG Wen-qu[2]

(1. Dept. of Math., GDUT, Guangzhou 510643, China; 2. Dept. of Graduate, GDUT, Guangzhou 510090, China)

Abstract: In this paper the Packing measure of the generalized Sierpinski sponge of three-dimension Euclidean space is discussed. For $\varphi(t)=t^{\theta}$, $\varphi(t)=\frac{t^{\theta}}{|\log t|}$ and genreal situations, the conditions that the Packing measure $P_{\varphi}[K(T,D)]$ is finite or infinite are proved.

Key words: Packing measure; self-affine set; Sierpinski sponge; dimension.