第21卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 21 No. 4
2001年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2001

JBW-代数上的局部导子*

纪 培 胜
(青岛大学数学系，山东 青岛 266071)

摘　要：本文证明了JBW-代数上的局部导子是导子，举反例说明了JBW-代数上的局部内导子未必是内导子，并且给出了JBW-代数的一个充要条件使得它上的局部内导子是内导子.

关键词：JBW-代数；导子；局部导子.
分类号：AMS(1991) 46H70/CLC O177.1
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)04-0600-03

设 A 是一个复或实的(未必是结合的)代数，M 是一个 A-双模，一个从 A 到 M 的线性映射 δ 称为导子，如果对任意的 $a,b\in A$，有 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$. 从 A 到 M 的线性映射 δ 称为局部导子，如果任给 $a\in A$，存在从 A 到 M 的导子 δ_a 使得 $\delta(a)=\delta_a(a)$. 对于局部导子，主要研究局部导子是否是导子，局部内导子是否是内导子，对于结合算子代数，在这方面已有大量的结果，参见文献[1－4]. 对于一类重要的非结合算子代数——JBW-代数，本文定理2证明了它上的局部导子是导子，例4说明了JBW-代数上的局部内导子未必是内导子，定理5给出了JBW-代数的一个充要条件使得它上的局部内导子是内导子.

一个JB-代数A是一个实的Banach Jordan代数且具有单位元1，它的积满足 $\|x\cdot y\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$，并且 $\|x^2\|\leqslant\|x^2+y^2\|$，这里 $x,y\in A$. 如果一个JB-代数 A 具有前对偶，则称之为JBW-代数，本文用 P_A 表示 A 中的幂等元的全体，用 U_A 表示 A 中的对称的全体. 关于Jordan算子代数的理论可参见[5].

设 A 是一个JBW-代数，δ 是从 A 到 A 中的局部导子，任给 $p\in P_A$，则有

$$\delta(p)=2\delta(p)\cdot p. \tag{1}$$

事实上有 $\delta(p)=\delta_p(p)=\delta_p(p^2)=\delta_p(p)\cdot p+p\cdot\delta_p(p)=\delta(p)\cdot p+p\cdot\delta(p)=2\delta(p)\cdot p$.

在JBW-代数 A 中，映射 $p\to 2p-1$ 是从 P_A 到 U_A 上的一对一映射，所以有下面与(1)等价的条件.

命题1　设 A 是一个JBW-代数，δ 是从 A 到 A 上的线性映射，则下列条件等价：

(i) $\delta(p)=2\delta(p)\cdot p$，任给 $p\in P_A$.

(ii) $u\cdot\delta(u)=0$，任给 $u\in U_A$.

证明　(i)⇒(ii) 由于 $\delta(1)=2\delta(1)\cdot 1=2\delta(1)$，所以 $\delta(1)=0$. 一般的，$u=2p-1$，则

$$u\cdot\delta(u)=(2p-1)\cdot\delta(2p-1)=2(2\delta(p)\cdot p-\delta(p)).$$

由(i)得 $u\cdot\delta(u)=0$.

---

* 收稿日期：1998-12-18
作者简介：纪培胜(1967-)，男，山东省胶州市人，博士，教授.

(ii)⇒(i) 显然 $\delta(1)=0$，令 $p=\frac{u+1}{2}$，则

$$\delta(p)-2\delta(p)\cdot p=\delta(p)\cdot(1-2p)=-u\cdot\delta(\frac{u+1}{2})=-u\cdot\delta(u)=0,$$

所以，$\delta(p)=2\delta(p)\cdot p$.

下面应用(1)给出 JBW-代数上导子的本质刻划.

定理 2 设 A 是 JBW-代数，δ 是从 A 到 A 上的连续线性映射，且对于 A 中任意幂等元都满足(1)(特别的，δ 是局部导子)，则 δ 是导子.

证明 任给 A 中二个正交的幂等元 p,q，则有

$$\begin{aligned}\delta(p)+\delta(p)=\delta(p+q)&=2\delta(p+q)\cdot(p+q)\\&=2\delta(p)\cdot P+2\delta(p)\cdot q+2\delta(q)\cdot p+2\delta(q)\cdot q\\&=\delta(p)+2(\delta(p)\cdot q+\delta(q)\cdot p)+\delta(q).\end{aligned}$$

从而有

$$\delta(p)\cdot q+\delta(q)\cdot p=0. \tag{2}$$

设 ω 是 A 中有限个正交幂等元的线性组合，即存在 A 中正交幂等元 $p_1,\cdots,p_n$ 和实数 $r_1,\cdots,r_n$ 使得 $\omega=\sum_{i=1}^{n}r_ip_i$，则有 $\delta(\omega^2)=\delta(\sum_{i=1}^{n}r_i^2p_i)=\sum_{i=1}^{n}r_i^2\delta(p_i)$. 另一方面

$$\begin{aligned}2\delta(\omega)\cdot\omega&=2(\sum_{i=1}^{n}r_i\delta(p_i))\cdot(\sum_{i=1}^{n}r_ip_i)\\&=2(\sum_{i=1}^{n}r_i^2\delta(p_i))\cdot p_i+2\sum_{i<j}(r_ir_j(\delta(p_i)\cdot p_j+\delta(p_j)\cdot p_i)).\end{aligned}$$

由(1)和(2)可得 $\delta(\omega^2)=2\delta(\omega)\cdot\omega$.

由谱定理知，这类元的全体范数稠于 A，从而任给 $a\in A$ 有 $\delta(a^2)=2\delta(a)\cdot a$.

由于

$$\begin{aligned}\delta((a+b)^2)=\delta(a^2)+2\delta(a\cdot b)+\delta(b^2)&=2\delta(a+b)\cdot(a+b)\\&=2\delta(a)\cdot a+2(\delta(a)\cdot b+\delta(b)\cdot a)+\delta(b^2)\\&=\delta(a^2)+2(\delta(a)\cdot b+\delta(b)\cdot a)+\delta(b^2),\end{aligned}$$

所以 $\delta(a\cdot b)=\delta(a)\cdot b+\delta(b)\cdot a$，即 δ 是导子.

Harald Upmeier[6]给出了 JBW-代数上内导子的定义，并且研究了导子是内导子 的那一类 JBW-代数，为了方便，重述[6]中的一些术语.

设 B,C 是带有括号运算[,]的李代数的子集，用 $[B,C]$ 表示有限个形如 $[a,b]$ 的元的线性组合，其中 $b\in B,c\in C$. 设 A 是一个 JBW- 代数，令 $T_A=\{T_x:x\in A\}$，这里 $T_x:A\to A$ 定义为 $T_x(y)=x\cdot y$，任给 $y\in A$. 令 $\mathrm{int}(A)=[T_A,T_A]$，则 $\mathrm{int}(A)$ 是导子李代数的理想，其中的元称为内导子. 由[7，定理 3.9]和[8，定理 6.4 和定理 6.5]知，任何 JBW-代数有如下分解

$$A=A_{ex}\oplus A_2\oplus A_{rev} \tag{3}$$

其中(I) A_{ex}是纯例外的(exceptional)JBW-代数.

(II) A_2 是一个 I_2 型的 JW-代数，它同构于$\oplus_{j\in J}L^\infty(S_j,U_j)$，这里 $j\in J$，是一个测度空间，U_j 是一个自旋(Spin)因子.

(III) A_{rev}是一个可逆的(reversible)JW-代数.

定理 3[6] 设 A 是一个 JBW- 代数且有分解(3)，则 A 上的导子都是内导子的充要条件是

$\sup_{j\in J}\mathrm{Dim}U_j < \infty$.

设 A 是JBW-代数，δ 是从 A 到 A 上的连续线性映射，如果任给 $a\in A$，存在从 A 上的内导子 δ_a 使得 $\delta(a)=\delta_a(a)$，则称 δ 为局部内导子，由定理2，A 上的局部内导子是导子. 但它与 vN 代数不同，JBW-代数上的局部内导子可能不是内导子. 这里给出一个反例.

例4 设 X 是一个实的无限维Hilbert空间，$e\in X$ 是一个单位向量，其正交补是 Y，则 $X=\mathrm{R}e\oplus Y$. 在 X 上按下面定义积 $(r_1e+y_1)\cdot(r_2e+y_2)=(r_1r_2+<y_1,y_2>)e+(r_1y_2+r_2y_1)$，则 X 是一个无限维的自旋因子. 由[6]知 X 上的导子恰好是 Y 上的斜对称算子，而 X 上的内导子恰好是由 Y 上的有限秩斜对称算子构成.

取 D 是 Y 上的无限秩斜对称算子，则 D 不是内导子. 任给 $x\in X$，由于 X 上的导子零化 X 的中心，所以我们可以假设 $x\in Y$，令 $y=Dx$，显然 x 和 y 是线性无关的.

令 $e_1=\dfrac{x}{\|x\|}$，$e_2=\dfrac{y-\langle y,e_1\rangle e_1}{\|y-\langle y,e_1\rangle e_1\|}$，$D_x=\dfrac{1}{2}([T_{De_1},T_{e_1}]+[T_{De_2},T_{e_2}]$，可验证 $D_x(x)=D(x)$，于是 D 是局部内导子.

由定理2，定理3和定理4，可得到JBW-代数 A 的一个充分必要条件使得 A 上的局部内导子是内导子.

定理5 设 A 是一个JBW-代数且有分解(3)，则 A 上的局部内导子都是内导子的充要条件是 $\sup_{j\in J}\mathrm{Dim}U_j<\infty$.

参考文献：

[1] KADISON R. *Local derivations* [J]. J. Algebra, 1990, **130**: 494—509.

[2] BRESAR M, SEMRL P. *Mappings which preserve idempotents, local automorphisms, local derivations* [J]. Can. J. Math., 1993, **45**(3): 483—496.

[3] CRIST L. *Local derivation on operator algebras* [J]. J. Funct. Anal., 1996, **135**: 76—92.

[4] 纪培胜. *AF C*-代数中子代数上的保幂等映射和局部导子* [J]. 数学学报, 1999, **42**(1): 151—154.
JI Pei-sheng. *Mappings of subalgebras of AF C*-algebras which preserve idempotents, and local derivations* [J]. Acta. Math. Sinica, 1999, **42**(1): 151—154. (in Chinese)

[5] HANCHE-OLSEN H, STORMER E. *Jordan Operator Algebras* [M]. Pitman Advanced Publishing Program. Boston, London, Melbourne, 1984.

[6] UPMEIER H. *Derivations of Jordan C*-algebras* [J]. Math. Scand., 1980, **46**: 251—164.

[7] SHULTZ F W. *On normed Jordan algebras which are Banach dual space* [J]. J. Funct. Anal., 1979, **31**: 360—376.

[8] STORMER E. *Jordan algebras of type I* [J]. Acta. Math., 1966, **115**: 165—184.

Local Derivations on JBW-Algebras

JI Pei-sheng

(Dept. of Math., Qingdao University, Shandong 266071, China)

Abstract: In this paper, first, we prove that the local derivations on *JBW*-algebras are derivations, next, we give an example to show that the local inner derivation may not be inner derivation, last, we give a sufficient and necessary condition to *JBW*-algebras such that all local inner derivations on such JBW—algebras are inner derivations.

Key words: JBW-algebra; derivation; local derivation.