

n -极大子群为 C -正规的有限群*

韦华全, 李碧荣

(广西师范学院数学系, 广西南宁 530001)

摘 要: 首先, 利用 Hall 子群的 C -正规性, 得到了有限群成为 π -可解群的一个充分条件, 推广了 Schur-Zassenhaus 定理; 其次, 考查了 n -极大子群或其 2 阶及 4 阶循环子群为 C -正规对有限群结构的影响.

关键词: 有限群; 极大子群; 可解群; 2-幂零群; 极小单群.

分类号: AMS(2000) 20D/CLC O152

文献标识码: A

文章编号: 1000-341X(2002)02-0241-06

本文讨论的群都是有限群, $M < \cdot G$ 表示 M 是 G 的极大子群, $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子集, $|G|_\pi$ 表示 $|G|$ 的 π 部分, p, q, p_i 均表示素数.

定义 1^[1] 群 G 的子群 H 称为在 G 中 C -正规, 如果存在 G 的正规子群 K , 使得 $G = HK$, 且 $H \cap K \leq H_G$, 这里 $H_G = \text{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} H^g$ 为 H 在 G 中的核.

为了方便讨论, 给出以下等价定义 1'

定义 1' 群 G 的子群 H 称为在 G 中 C -正规, 如果存在 G 的正规子群 K , 使得 $G = HK$, 且 $H \cap K = H_G$.

定义 2^[1] 群 G 称为 C -单群, 如果 G 没有非平凡的 C -正规子群.

群 G 的 C -正规子群具有以下一些基本性质

性质^[1] (1) 若 H 在 G 中正规, 则 H 在 G 中 C -正规;

(2) G 是 C -单的当且仅当 G 是单的;

(3) 若 H 在 G 中 C -正规, $H \leq K \leq G$, 则 H 在 K 中 C -正规;

(4) 设 $K \triangleleft G, K \leq H$, 则 H 在 G 中 C -正规的充要条件是 H/K 在 G/K 中 C -正规.

定义 3^[4] 群 G 的子群链 $1 = G_t < G_{t-1} < \cdots < G_1 < G_0 = G$ 称为 G 的一个极大链, 若 $G_i < \cdot G_{i-1} (i = 1, \cdots, t)$. G 的子群 M 称为 G 的 n -极大子群 (或 n 次极大子群), 若存在 G 的一个极大链 $G_i (0 \leq i \leq t)$ 使 $M = G_n$. G 的 n -极大子群的全体记为 $\nabla_n(G)$. 设 $G_i (0 \leq i \leq s)$ 是 G 的一个最长的极大链. 则当 $n > s$ 时, $\nabla_n(G) = \emptyset$.

定义 4^[6] 称群 G 为 π -可解群, 如果存在 G 的一个正规群列 $G = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq$

* 收稿日期: 1999-03-22

作者简介: 韦华全 (1963-), 男, 广西南宁人, 硕士, 副教授.

E-mail: weihuaquan@163.com

$N_r = 1$, 使 N_i/N_{i+1} 为 π' -群或 p -群, 其中 $p \in \pi, i = 1, \dots, r-1$.

引理 1^[1] 群 G 可解当且仅当 G 的每个极大子群在 G 中 C -正规.

引理 2^[4] 设 $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. 若 $\nabla_n(G) = \{1\}$, 则

(1) $n \leq 3$ 时, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$; (2) $n \geq 4$ 且 G 可解时, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$.

引理 3^[4] 设 $\nabla_4(G) = \emptyset$, 或 $\nabla_8(G) = \emptyset$ 且 $3 \notin \pi(G)$, 则 G 可解.

引理 4^[2] 极小单群有下述五种类型:

I. $\text{PSL}(2, p), p > 3, p^2 \not\equiv 1 \pmod{5}$, 阶 $p(p^2-1)/2$.

II. $\text{PSL}(2, 2^q)$, 阶 $2^q(2^{2q}-1)$.

III. $\text{PSL}(2, 3^q), q$ 奇素数, 阶 $3^q(3^{2q}-1)$.

IV. $\text{PSL}(3, 3)$, 阶 $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$.

V. $S_z(2^q), q$ 奇素数, 阶 $2^{2q}(2^q-1)(2^{2q}+1)$.

定理 1 若群 G 的 π -Hall 子群 H 在 G 中 C -正规, 则 G 是 π -可解群或 π' -可解群.

证明 由 H 在 G 中 C -正规, 据定义 1', 存在 $K \triangleleft G$, 使得 $G = HK$, 满足 $H \cap K = H_G$.

我们分以下两款完成证明:

(i) 若 $2 \notin \pi$, 则 G 是 π -可解群.

事实上, 因 $G/K \cong H/H_G$, 故由 H/H_G 为奇阶群知 G/K 可解. 此时, 若 $H_G = 1$, 则 K 为 π' -群, G 当然为 π -可解群. 若 $H_G \neq 1$, 则 $G/H_G = (H/H_G)(K/H_G)$ 满足 $H/H_G \cap K/H_G = (H \cap K)/H_G = 1$, 从而 G/H_G 为 π -可解群. 但 H_G 可解, 故 G 仍为 π -可解群.

(ii) 若 $2 \in \pi$, 则 G 是 π' -可解群.

因为, 若 $H_G = 1$, 则 K 是 G 的正规 π' -Hall 子群. 由 (i) 知 G 是 π' -可解群. 若 $H_G \neq 1$, 则 $G/H_G = (H/H_G)(K/H_G)$ 满足 $H/H_G \cap K/H_G = (H \cap K)/H_G = 1$, 而 K/H_G 为 G/H_G 的正规 π' -Hall 子群, 故由 (i) 得 G/H_G 为 π' -可解群. 但 H_G 是 π -群, 故 G 仍然是 π' -可解群. $\square$

由于 π -可解群或 π' -可解群的 π' -Hall 子群总是存在的, 且所有的 π' -Hall 子群共轭, 所以得到下述推论:

推论 1 (Schur-Zassenhaus 定理的推广) 设 H 是 G 的 C -正规 π -Hall 子群, 则 H 在中有补且所有这样的补在 G 中共轭.

定理 2 设 $\nabla_n(G)$ 中的子群均在 G 中 C -正规. 若 G 还满足以下条件之一, 则 G 是可解群:

(1) $2 \leq n \leq 3$;

(2) $4 \leq n \leq 7$ 且 $3 \notin \pi(G)$.

证明 (1) 当 $n = 2$ 时, 不妨设 $\nabla_1(G) \neq \emptyset$. 任取 $M \in \nabla_1(G)$, 若 $\nabla_1(M) = \emptyset$, 则 $M = 1$ 可解. 若 $\nabla_1(M) \neq \emptyset$, 则由题设及性质 (3) 知 $\nabla_1(M)$ 中的子群均在 M 中 C -正规. 由引理 1 得 M 可解. 于是, 由 M 的任意性知, G 的每真子群皆可解. 若 G 不可解, 则 G 为内-可解群. 据 [5, 定理 5.2], $G/\Phi(G)$ 为极小单群, 从而由性质 (2) 知 $G/\Phi(G)$ 为 C -单群. 若 $\nabla_2(G/\Phi(G)) = \emptyset$, 则由引理 3 知 $G/\Phi(G)$ 可解, 矛盾. 故 $\nabla_2(G/\Phi(G)) \neq \emptyset$. 据题设及性质 (4) 知 $\nabla_2(G/\Phi(G))$ 中的子群均在 $G/\Phi(G)$ 中 C -正规, 从而由 $G/\Phi(G)$ 的 C -单性得 $\nabla_2(G/\Phi(G)) = \{1\}$. 此时, 由引理 2 又得 $G/\Phi(G)$ 可解, 仍是矛盾.

利用 $n = 2$ 时的结果, 当 $n = 3$ 时可类似证明.

(2) 不妨设 $\nabla_1(G) \neq \emptyset$. 对任 $M \in \nabla_1(G)$, 由题设及性质(3)知, $\nabla_{n-1}(M)$ 中的子群均在 M 中 C -正规. 据归纳法, M 可解. 于是, 若 G 不可解, 则 G 为内-可解群. 进一步知 $G/\Phi(G)$ 是极小单群, 从而 $G/\Phi(G)$ 也是 C -单的. 故 $\nabla_n(G/\Phi(G)) = \emptyset$ 或 $\{1\}$. 因 $n \leq 7$, 故 $\nabla_8(G/\Phi(G)) = \emptyset$. 由引理 3 可得 $G/\Phi(G)$ 可解, 矛盾. $\square$

定理 3 设 $\nabla_4(G)$ 中的子群均在 G 中 C -正规. 则下述结论之一成立:

- (1) G 是可解群;
- (2) $G/\Phi(G) \cong A_5$;
- (3) $G/\Phi(G) \cong \text{PSL}(2, 13)$;
- (4) $G/\Phi(G) \cong \text{PSL}(2, p)$, 满足

$$p = 4p_1 + 1 = 6p_2 - 1, \quad (*)$$

这里 $p_1 \geq 43, p_2 \geq 29$;

- (5) $G/\Phi(G) \cong \text{PSL}(2, p)$, 满足

$$p = 6p_1 + 1 = 4p_2 - 1, \quad (**)$$

这里 $p_1 \geq 7, p_2 \geq 11$.

证明 不妨设 $\nabla_1(G) \neq \emptyset$. 对任 $M \in \nabla_1(G)$, 则 $\nabla_3(M)$ 中的子群均在 M 中 C -正规. 由定理 2, M 可解. 于是, 若 G 可解, 则(1)成立. 若 G 不可解, 则 $G/\Phi(G)$ 是极小单群从而为 C -单群. 故 $\nabla_4(G/\Phi(G)) = \emptyset$ 或 $\{1\}$. 若 $\nabla_4(G/\Phi(G)) = \emptyset$, 则由引理 3 得 $G/\Phi(G)$ 可解, 矛盾. 故 $\nabla_4(G/\Phi(G)) = \{1\}$. 下面检查所有的极小单群(极小单群的子群可见[2]或[5]).

(1) $\text{PSL}(2, p), p > 3, p^2 \not\equiv 1 \pmod{5}$.

首先, 当 $p^2 \equiv 1 \pmod{16}$ 时, $\text{PSL}(2, p)$ 有 2-极大子群为 A_4 , 而 A_4 有阶为 2 的 2-极大子群. 即 $\text{PSL}(2, p)$ 有不为 1 的 4-极大子群, 不可. 故 $p^2 \not\equiv 1 \pmod{16}$.

其次, $\text{PSL}(2, p)$ 有两个阶分别为 $p-1$ 和 $p+1$ 的极大子群 D_1 和 D_2 (二面体群), D_1 和 D_2 分别含阶为 $p-1/2$ 和 $p+1/2$ 的循环子群 E_1 和 E_2 . 显然, E_1 和 E_2 都是 $\text{PSL}(2, p)$ 的 2-极大子群. 因 $\nabla_4(\text{PSL}(2, p)) = \{1\}$, 故 $\nabla_2(E_1), \nabla_2(E_2) = \emptyset$ 或 $\{1\}$. 以下分四种情况讨论:

(i) 若 $\nabla_2(E_1) = \nabla_2(E_2) = \emptyset$, 因 $p-1/2 > 1$, 故 $\nabla_1(E_1) = \nabla_1(E_2) = \{1\}$. 于是, $p-1/2 = p_1, p+1/2 = p_2$, 从而 $p = p_1 + p_2$. 由此知 p_1 和 p_2 互为奇偶, 进一步得 $p_1 = 2, p = 5$ 和 $p_2 = 3$. 检查 A_5 的所有子群知 $\nabla_4(A_5) = \{1\}$, 故 A_5 满足定理的条件. 此时(2)成立.

(ii) 若 $\nabla_2(E_1) = \{1\}, \nabla_2(E_2) = \emptyset$, 则由引理 2 得 $p-1/2 = p_1 p_2, p+1/2 = p_3$. 于是 $p = p_1 p_2 + p_3$, 从而 $p_1 p_2$ 和 p_3 互为奇偶. 但当 $p_3 = 2$ 时, $p = 3$, 不可. 故 $p_1 p_2$ 为偶数, 不妨设 $p_2 = 2$. 又因 $3 \mid (p-1)p(p+1)$, 而 $p \neq 3$, 故 $3 \mid p-1$ 或 $3 \mid p+1$, 即 $p_1 = 3$ 或 $p_3 = 3$. 当 $p_3 = 3$ 时, $p = 5, p-1/2 = 2$, 不可. 故 $p_1 = 3, p = 13, p_3 = 7$. 检查 $\text{PSL}(2, 13)$ 的所有子群知 $\nabla_4(\text{PSL}(2, 13)) = \{1\}$, 此时(3)成立.

(iii) 若 $\nabla_2(E_1) = \emptyset, \nabla_2(E_2) = \{1\}$, 则 $p-1/2 = p_1, p+1/2 = p_2 p_3$. 类似(ii)可知 p_1 和 $p_2 p_3$ 互为奇偶. 易知 $p_1 \neq 2$, 不妨设 $p_3 = 2$, 则 $p_1 = 3$ 或 $p_2 = 3$. 当 $p_1 = 3$ 时, $p = 7, p^2 \equiv 1 \pmod{16}$, 不可; 当 $p_2 = 3$ 时, $p = 11$, 有 $p^2 \equiv 1 \pmod{5}$, 亦不可. 即情况(iii)不存在.

(iv) 若 $\nabla_2(E_1) = \nabla_2(E_2) = \{1\}$, 则有 $p-1/2 = p_1 p_2, p+1/2 = p_3 p_4$, 于是 $p_1 p_2$ 和 $p_3 p_4$ 互为奇偶. 故 p 可写为 $p = 4p_1 + 1 = 2p_2 p_3 - 1$ 或 $p = 2p_1 p_3 + 1 = 4p_2 - 1$. 易知, 在 $p = 4p_1$

$+1 = 2p_2p_3-1$ 中 $p_1 \neq 3$, 故不妨设 $p_3 = 3$, 则 $p = 4p_1 + 1 = 6p_2-1$; 而在 $p = 2p_1p_3 + 1 = 4p_2-1$ 中 $p_2 \neq 3$, 可设 $p_3 = 3$, 则 $p = 6p_1 + 1 = 4p_2-1$. 直接验证可知, 在 $p = 4p_1 + 1 = 6p_2-1$ 中, $p_1 \geq 43, p_2 \geq 29$; 而在 $p = 6p_1 + 1 = 4p_2-1$ 中, $p_1 \geq 7, p_2 \geq 11$. 检查满足(4)或(5)附加条件的 $\text{PSL}(2, p)$ 的所有子群知 $\nabla_4(\text{PSL}(2, p)) = \{1\}$, 此时(4)或(5)成立.

(I) $\text{PSL}(2, 2^q)$.

由于 $\text{PSL}(2, 2^q) \cong A_5$, 所以不妨设 $q \geq 3$. $\text{PSL}(2, 2^q)$ 的 2-Sylow 子群的正规化子 N 的阶为 $2^q(2^q-1)$. 设 $N_2 \in \text{Syl}_2(N)$, x 为 N_2 的一个对合, 则 $\langle x \rangle$ 是 N_2 的 q 次极大子群. 于是, 在含 $\langle x \rangle$ 和 N_2 的 N 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 N 的至少 q 次极大子群. 从而在含 $\langle x \rangle$ 、 N_2 和 N 的 $\text{PSL}(2, 2^q)$ 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 $\text{PSL}(2, 2^q)$ 的至少 $q+1$ 次极大子群. 但 $q+1 \geq 4$, 故 $\text{PSL}(2, 2^q)$ 有不等于 1 的 4-极大子群, 即 $\nabla_4(\text{PSL}(2, 2^q)) \neq \{1\}$.

(II) $\text{PSL}(2, 3^q)$, q 奇素数.

$\text{PSL}(2, 3^q)$ 的 3-Sylow 子群的正规化子 N 的阶为 $3^q(3^q-1)/2$. 设 $N_3 \in \text{Syl}_3(N)$, $\langle x \rangle$ 为 N_3 的一个 3 阶子群. 类似(I)知, 在含 $\langle x \rangle$ 、 N_3 和 N 的 $\text{PSL}(2, 3^q)$ 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 $\text{PSL}(2, 3^q)$ 的至少 $q+1$ 次极大子群. 于是, $\text{PSL}(2, 3^q)$ 被排除.

(IV) $\text{PSL}(3, 3)$.

$\text{PSL}(3, 3)$ 有阶为 $2^4 \cdot 3^3$ 的 Hesse 群, 类似(I)可排除 $\text{PSL}(3, 3)$.

(V) $S_2(2^q)$, q 奇素数.

$S_2(2^q)$ 的 2-Sylow 子群的正规化子 N 为 Frobenius 群, N 的阶为 $2^{2q}(2^q-1)$. 设 $N_2 \in \text{Syl}_2(N)$, x 为 N_2 的一个对合. 类似(II), 在含 $\langle x \rangle$ 、 N_2 和 N 的 $\text{PSL}(2, 2^q)$ 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 $\text{PSL}(2, 2^q)$ 的至少 $2q+1$ 次极大子群. 故 $\nabla_4(S_2(2^q)) \neq \{1\}$, $S_2(2^q)$ 也被排除. $\square$

推论 2 设 $\nabla_4(G)$ 中的子群均在 G 中 C -正规. 若 G 满足以下条件之一, 则 G 是可解群:

- (1) $|G/\Phi(G)|_2 = 2^m$, 其中 $m \neq 2$;
- (2) $|\pi(G)| = 3$ 且 $5 \notin \pi(G)$;
- (3) $|\pi(G)| = 4$ 且 $7 \notin \pi(G)$ 或 $13 \notin \pi(G)$;
- (4) $|\pi(G)| > 5$.

证明 因 $p \in \pi(\Phi(G))$ 时, $p \in \pi(G/\Phi(G))$. 故 $|\pi(G/\Phi(G))| = |\pi(G)|$. 但在定理 3 中, $|A_5| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $|\text{PSL}(2, 13)| = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, $|\text{PSL}(2, p)| = 2^2 \cdot 3 \cdot p p_1 p_2$, 由此易知本推论成立. $\square$

问题 方程(*)或(**)是否有有限组素数解?

定理 4 设 $8 \leq n \leq 2p+1$ 且 $3 \notin \pi(G)$. 若 $\nabla_n(G)$ 中的子群均在 G 中 C -正规, 且对任 $q < p$, G 与 $S_2(2^q)$ 无关, 则 G 是可解群.

证明 设 G 是极小反例. 任取 $M \in \nabla_1(G)$, 则 M 必可解. 若不然, 则由 G 为极小反例知, 对任 $8 \leq m < n$, $\nabla_m(M)$ 中的子群不能全在 M 中 C -正规. 但 $\nabla_{n-1}(M) \subseteq \nabla_n(G)$, 故 $\nabla_8(M) = \emptyset$. 由引理 3 得 M 可解, 矛盾. 由 M 的任意性知, 若 G 不可解, 则 $G/\Phi(G)$ 为极小单群. 又易知 $\nabla_n(G/\Phi(G)) = \{1\}$. 另外, 因 3'-单群同构于 $S_2(2^q)$ ([3], P_{258}), 故 $G/\Phi(G) \cong S_2(2^q)$, 其中 q 是奇素数. 由题设, 不妨设这里 $q \geq p$. 检查 $S_2(2^q)$ 的子群知, $\nabla_n(S_2(2^q)) \neq \{1\}$, 矛盾. $\square$

推论 3 设 $3 \notin \pi(G)$. 若 $\nabla_8(G)$ 中的子群均在 G 中 C -正规, 则 G 是可解群, 或 $G/\Phi(G)$

$\cong S_2(2^3)$.

定理 5 设 $|G|_2 = 2^m, m-1 \geq n$. 若 $\nabla_n(G)$ 中的子群的 2 阶及 4 阶循环子群均在 G 中 C -正规, 则 G 是 2-幂零群.

证明 (i) 首先证明, 若群 G 的 2 阶及 4 阶循环子群均在 G 中 C -正规, 则 G 是 2-幂零群.

因为条件是子群闭的, 所以若 G 非 2-幂零群, 则 G 是内 2-幂零群. 由 Itô 定理, $G = G_2 G_p$, 其中 $G_2 \in \text{Syl}_2(G), G_p \in \text{Syl}_p(G), G_2 \triangleleft G, G_2$ 的幂指数最多为 4. 设 $1 \neq x \in G_2$, 则 $o(x) = 2$ 或 4. 由 $\langle x \rangle$ 在 G 内 C -正规, 故 $G = \langle x \rangle K$, 其中 $K \triangleleft G, \langle x \rangle \cap K = \langle x \rangle_G$. 若 $K = G$, 则 $\langle x \rangle \triangleleft G$, 可得 $\langle x \rangle G_p \leq G$. 此时若 $\langle x \rangle G_p = G$, 则 $G_2 = \langle x \rangle$ 循环, G 当然为 2-幂零群, 矛盾. 故 $\langle x \rangle G_p < G, \langle x \rangle G_p$ 为幂零的, 有 $G_p^x = G_p$. 由 x 的任意性知 G_2 正规化 G_p , 故 $G_p \triangleleft G$, 导致 G 为幂零群, 也是矛盾. 于是 $K < G$, 进一步得出 K 为幂零的. 显然 G_p 是 K 的特征子群, 而 $K \triangleleft G$, 故 $G_p \triangleleft G, G$ 又为幂零的, 还是矛盾.

(ii) 其次证明, 群 G 的 2 阶及 4 阶循环子群均在 G 中 C -正规.

设 $\langle x \rangle$ 是 G 的任一个 2 阶或 4 阶循环子群, $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$. 不失一般性, 设 $\langle x \rangle < G_2 < G$. 因 $|G_2 : \langle x \rangle| = 2^{m-1}$ 或 2^{m-2} , 故 $\langle x \rangle$ 是 G_2 的 $m-1$ 次或 $m-2$ 次极大子群. 于是, 在含 $\langle x \rangle$ 和 G_2 的 G 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 G 的至少 $m-1$ 次极大子群. 而 $m-1 \geq n$, 故 $\langle x \rangle$ 必含于 G 的某个 n -极大子群之中. 依题设, $\langle x \rangle$ 在 G 内 C -正规. 由 $\langle x \rangle$ 的任意性即知 G 的 2 阶及 4 阶循环子群均在 G 中 C -正规. 据 (i), G 是 2-幂零群. $\square$

推论 4 设 $0 \leq n \leq 2$. 若 $\nabla_n(G)$ 中的子群的 2 阶及 4 阶循环子群均在 G 中 C -正规, 则 G 是 2-幂零群.

定理 6 设 $\Phi(G) = 1, |G|_2 = 2^m$, 其中 $m \geq n$. 若 $\nabla_n(G)$ 中的子群的 2 阶子群均在 G 中 C -正规, 则 G 是 2-幂零群.

证明 设 x 为群 G 的一个对合, $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$, 不妨设 $\langle x \rangle < G_2 < G$. 则在含 $\langle x \rangle$ 和 G_2 的 G 的极大链中, $\langle x \rangle$ 是 G 的至少 m 次极大子群. 但 $m \geq n$, 故 $\langle x \rangle$ 必含于 G 的某个 n -极大子群之中. 由题设, $\langle x \rangle$ 在 G 中 C -正规, 即 $G = \langle x \rangle K$, 这里 $K \triangleleft G, \langle x \rangle \cap K = \langle x \rangle_G$. 若 $K = G$, 则 $\langle x \rangle \triangleleft G$. 因 $\Phi(G) = 1$, 故有 G 的极大子群 M , 使 $\langle x \rangle \not\subseteq M$, 于是 $G = \langle x \rangle M$, 且 $\langle x \rangle \cap M = 1$. 由此得 $|M|_2 = 2^{m-1}$, 且 $M \triangleleft G$, 进一步得 $\Phi(M) \leq \Phi(G) = 1$. 又由题设及性质 (3) 知, $\nabla_{n-1}(M)$ 中的子群的 2 阶子群在 M 中 C -正规. 据归纳法, M 是 2-幂零群. 设 M^* 为 M 的 $2'$ -Hall 子群, 则 M^* 亦为 G 的 $2'$ -Hall 子群, 且由 $M^* \text{ char } M \triangleleft G$ 得 $M^* \triangleleft G$. 故 G 是 2-幂零群. 若 $K < G$, 则 $\langle x \rangle \cap K = 1$. 类似上述可得 G 是 2-幂零群. $\square$

参考文献:

- [1] WANG Yan-ming. *C-normality of groups and its properties* [J]. Journal of Algebra, 1996, **180**: 954—965.
 - [2] THOMPSON J G. *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable I* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, **74**: 383—437.
 - [3] GORENSTEIN D. *Finite Simple Groups* [M]. New York and London, Plenum Press, 1982
 - [4] 路在平, 王品超. 某些子群是半正规的有限群 [J]. 数学学报, 1998, **41**(5): 949—954.
- LU Zai-ping, WANG Pin-chao. *Finite groups some of whose subgroups are seminormal* [J]. Acta.

Math. Sinica, 1998, 41(5): 949—954. (in Chinese)

- [5] 陈重穆. 内外 Σ -群和极小非 Σ -群 [M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1988.

CHEN Chong-mu. *Inner and Outer Σ -Groups and Minimal Non- Σ -Groups* [M]. Chongqing: Southwest China Normal University, Press, 1988. (in Chinese)

- [6] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999 年, 第二版.

XU Ming-yao. *Introduction to Finite Group Theory (Vol. 1)* [M]. Beijing: Science Publishing House, 1999, 2nd edit. (in Chinese)

Finite Groups with C -Normal n -Maximal Subgroups

WEI Hua-quan, LI Bi-rong

(Dept. of Math., Guangxi Teachers' College, Nanning 530001, China)

Abstract: This paper deals with the influence of Hall subgroups or C -normal n -maximal subgroups on the structure of a finite group.

Key words: finite group; maximal subgroup; solvable group; 2-nilpotent group; minimal simple group.