第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

关于H. Yoshida的一个问题*

常 建 明
(常熟高等专科学校数学系，江苏 常熟 215500)

摘 要:H. Yoshida曾经提出下述问题：对级小于1/2的整函数$f(z)$，是否自原点出发的每一条射线，或者为它的Julia方向，或者在包含该射线的某个角域内当$|z|\to\infty$时有$|f(z)|\to\infty$.本文的结论表明对正则增长的整函数，H. Yoshida问题的答案是肯定的，而且对许多其他的Julia型方向，类似的问题的答案也是肯定的.

关键词:整函数；Julia方向；Yoshida型问题.
分类号:AMS(2000) 30D35/CLC O174.52
文献标识码:A **文章编号**:1000-341X(2002)04-0609-06

1 引言及主要结果

如摘要所述，H. Yoshida[1]曾经提出过一个很有意义的问题. 很自然地，对其它的Julia型方向也可有类似的问题.我们统称它们为Yoshida型问题.本文对此做了一些工作，证明了如下的结论，作为它的应用我们部分地对Yoshida型问题予以正面回答(定理2—4).

定理1 设$f(z)$是开平面上正则增长(即级与下级相等)的整函数，其级λ满足$0<\lambda\leqslant 1/2$. 又$L:\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$为一条自原点出发的射线，则对任何实数$k$，或者在包含$L$的任一角域$\Omega$内有

$$\sup_{z\in\Omega}\frac{|z|^{k+1}|f'(z)|}{1+|z|^{2k}|f(z)|^2}=+\infty,$$

或者在包含L的某个角域内，当$|z|\to\infty$时一致地有$|z|^k|f(z)|\to\infty$.

另外本文中将不加说明地采用值分布理论中的各种标准符号(参[2])，又用字母C表示常数，但每次出现可不尽相同.

2 若干引理

引理1[3] 设$f(z)$是开平面上的整函数，下级$\mu\in(0,1/2]$，则存在一条通向无穷的简单连续曲线Γ，使得

---

* 收稿日期:1999-12-10
作者简介:常建明(1964-)，男，副教授.

$$\varliminf_{z\in\Gamma,|z|\to\infty}\frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}\geqslant\mu. \tag{2.1}$$

引理 2[4] 变换

$$\tau=\tau(z)=\frac{z^{\frac{\pi}{2\sigma}}-R^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{z^{\frac{\pi}{2\sigma}}+R^{\frac{\pi}{2\sigma}}}\quad(0<\sigma\leqslant\pi,0<R<+\infty), \tag{2.2}$$

将 $\Omega(-\sigma,\sigma)$ 变为 τ 平面上的单位圆,点 $z=R$ 变为 $\tau=0$,并且 $\overline{\Omega}(-\sigma/2,\sigma/2;R_1,R_2)(0<R_1\leqslant R\leqslant R_2<+\infty)$ 在 τ 平面上的象必定含在 $|\tau|\leqslant\rho$ 内,这里

$$\rho=1-\frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{\pi}{\sigma}}. \tag{2.3}$$

引理 3 设 $f(z)$ 在穿孔复平面 $\{z:0<|z|<+\infty\}$ 内全纯,$\sigma\in(0,\pi]$ 为一实数使得在 $\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma)$ 内有

$$\frac{|z||f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\leqslant C. \tag{2.4}$$

又若在 $\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{256},\frac{\sigma}{256})$ 内存在一列 $\{z_n\}$,$z_n\to\infty(n\to\infty)$ 使得 $|f(z_n)|\leqslant C$,则也有

$$|f(|z_n|)|\leqslant C. \tag{2.5}$$

证明 由于点 $z=|z_n|$ 包含在以 $z=z_n$ 为圆心,$|z_n|\sin\frac{\sigma}{32}$ 为半径的圆内,故由最大模原理和一个熟知的不等式([2,P_{11}])有

$$\begin{aligned}\log|f(|z_n|)|&\leqslant\log^+M(|z_n|\sin\frac{\sigma}{32},z_n,f)\\&\leqslant\frac{|z_n|\sin\frac{\sigma}{16}+|z_n|\sin\frac{\sigma}{32}}{|z_n|\sin\frac{\sigma}{16}-|z_n|\sin\frac{\sigma}{32}}T(|z_n|\sin\frac{\sigma}{16},z_n,f)\\&\leqslant CT(|z_n|\sin\frac{\sigma}{16},g_n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里 $g_n(z)=f(z+z_n)$. 由于当 $|z|\leqslant|z_n|\sin\frac{\sigma}{16}$,并且 $|z_n|$ 充分大时 $z+z_n\in\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma)$. 故由式(2.4)知

$$\frac{|g_n'(z)|}{1+|g_n(z)|^2}=\frac{|f'(z+z_n)|}{1+|f(z+z_n)|^2}\leqslant\frac{C}{|z+z_n|}\leqslant\frac{C}{|z_n|-|z|},$$

从而当 $0\leqslant r<|z_n|$ 时[5]

$$S(r,g_n)=\frac{1}{\pi}\iint_{|z|\leqslant r}\left(\frac{|g_n'(z)|}{1+|g_n(z)|^2}\right)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{Cr}{|z_n|-r},$$

$$T_0(r,g_n)=\int_0^r\frac{S(t,g_n)}{t}\mathrm{d}t\leqslant C\log\frac{|z_n|}{|z_n|-r}.$$

于是由[5,P_{196}]和[2,P_{5-7}]及 $|g_n(0)|=|f(z_n)|\leqslant C$ 知

$$T(r,g_n)\leqslant T_0(r,g_n)+\frac{1}{2}\log2+\log^+|g_n(0)|\leqslant C\log\frac{e|z_n|}{|z_n|-r},$$

从而有 $T(|z_n|\sin\frac{\sigma}{16},g_n)\leqslant C$. 将此式代入(2.6)式便知 $\log|f(|z_n|)|\leqslant C$. 于是引理 3 得证.

3 定理的证明

不妨设 L 为正实轴 $\arg z=0$(否则作一旋转即可).若有某个实数 k 及包含 L 的某个角域 $\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma)$,使得当 $z\in\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma)$ 时有

$$\frac{|z|^{k+1}|f'(z)|}{1+|z|^{2k}|f(z)|^2}\leqslant C, \tag{3.1}$$

那么我们将证明在 $\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{256},\frac{\sigma}{256})$ 上当 $|z|\to\infty$ 时一定有 $|z|^k|f(z)|\to\infty$.

若不然,则存在一列 $\{z_n\}\subset\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{256},\frac{\sigma}{256})$,$|z_n|\to\infty(n\to\infty)$ 使得

$$|z_n|^k|f(z_n)|\leqslant C. \tag{3.2}$$

记 $g(z)=z^kf(z)$,则 $g(z)$ 在穿孔复平面 $\{z:0<|z|<+\infty\}$ 内全纯,并且在 $\overline{\Omega}(-\sigma,\sigma)$ 上由(3.1)知有

$$\frac{|z||g'(z)|}{1+|g(z)|^2}\leqslant\frac{|z|^{k+1}|f'(z)|}{1+|z|^{2k}|f(z)|^2}+\frac{|k||z|^k|f(z)|}{1+|z|^{2k}|f(z)|^2}\leqslant C+\frac{|k|}{2}. \tag{3.3}$$

又由(3.2)知 $|g(z_n)|\leqslant C$. 于是由引理 3 有

$$|g(|z_n|)|\leqslant C. \tag{3.4}$$

作变换

$$\tau=\tau(z)=\frac{z^{\frac{\pi}{2\sigma}}-|z_n|^{\frac{\pi}{2\sigma}}}{z^{\frac{\pi}{2\sigma}}+|z_n|^{\frac{\pi}{2\sigma}}}, \tag{3.5}$$

由引理 2,它把点 $z=|z_n|$ 映为 $\tau=0$,把 $\Omega(-\sigma,\sigma)$ 映为 $|\tau|<1$,而 $\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma}{2};|z_n|^{1-\eta},|z_n|)$ 在 τ 平面上的象包含在 $|\tau|\leqslant\rho$ 内,这里 η 为一小于 1 的待定正数,$\rho=1-\frac{1}{4}|z_n|^{-\frac{\eta\pi}{\sigma}}$. 记

$$G(\tau)=g(z(\tau)),F(\tau)=f(z(\tau)),$$

这里 $z=z(\tau)=|z_n|(\frac{1+\tau}{1-\tau})^{\frac{2\sigma}{\pi}}$ 是上述变换(3.5)之逆. 于是 $F(\tau)=(z(\tau))^{-k}G(\tau)$. 据(3.3)有

$$\frac{|G'(\tau)|}{1+|G(\tau)|^2}\leqslant C\frac{|z'(\tau)|}{|z(\tau)|}\leqslant\frac{C}{1-|\tau|^2},$$

故当 $0\leqslant r<1$ 时

$$S(r,G)\leqslant C\int_0^r\frac{t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{Cr^2}{1-r^2},$$

$$T_0(r,G)=\int_0^r\frac{S(t,G)}{t}\mathrm{d}t\leqslant C\log\frac{1}{1-r^2},$$

于是由(3.4)知

$$T(r,G)\leqslant T_0(r,G)+\frac{1}{2}\log 2+\log^+|G(0)|\leqslant C\log\frac{e}{1-r^2},$$

$$T(r,F)\leqslant T(r,G)+T(r,(z(\tau))^{-k})\leqslant C\log\frac{|z_n|}{1-r^2},$$

$$\log M(\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma}{2};|z_n|^{1-\eta},|z_n|),f)\leqslant\log M(\rho,F)$$

$$\leqslant \frac{\frac{1+\rho}{2}+\rho}{\frac{1+\rho}{2}-\rho} T\left(\frac{1+\rho}{2}, F\right) \leqslant C|z_n|^{\frac{\pi}{\sigma}} \log|z_n|. \tag{3.6}$$

另一方面，由引理1，存在一条连续曲线 Γ，当 $z \in \Gamma$ 且 $|z|$ 充分大时对任意小正数 $\varepsilon(<\mu)$ 有 $\log|f(z)| > |z|^{\mu-\varepsilon}$. 设 Γ 与圆周 $|z|=|z_n|^{1-\eta}$ 的交点为 z'_n，则由(3.6)知只要适当选取 η（例可取 $\eta=\frac{\mu}{2\mu+\frac{4\pi}{\sigma}}$）就有

$$\log|f(z'_n)| > |z'_n|^{\mu-\varepsilon} = |z_n|^{(1-\eta)(\mu-\varepsilon)} > \log M(\overline{\Omega}(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}; |z_n|^{1-\eta}, |z_n|), f). \tag{3.7}$$

注意到在区间 $[\frac{1}{4}|z_n|^{(1-\eta)(\mu-\varepsilon)}, \frac{1}{2}|z_n|^{(1-\eta)(\mu-\varepsilon)}]$ 内存在 N 使得 $f'(z)$ 在等势线 $\log|f(z)| = N$ 上无零点，若记 $E_n = \{z: \log|f(z)| > N, |z| < |z_n|\}$，则 $z'_n \in E_n$. 设 E_n 的包含 z'_n 的连通分支为 Ω_n，则有最大模原理和(3.7)知 Ω_n 是一无界域并且 $\Omega_n \subset \Omega(\frac{\sigma}{2}, 2\pi-\frac{\sigma}{2})$，从而 $\Omega_n \cap \{z: |z|=|z_n|\}$ 非空. 设 $\theta(t)(|z_n|^{1-\eta} \leqslant t \leqslant |z_n|)$ 为 $\Omega_n \cap \{z: |z|=t\}$ 的弧度，$t\theta(t)$ 为其线性测度，则 $\theta(t) \leqslant 2\pi-\sigma$，从而

$$\pi \int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|} \frac{dt}{t\theta(t)} \geqslant \frac{\pi}{2\pi-\sigma} \int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|} \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2\pi-\sigma}(\eta \log|z_n| - \log 4). \tag{3.8}$$

再根据调和测度的一个估计([5,P116])有

$$\log|f(z'_n)| \leqslant N + 9\sqrt{2} \exp\left(-\pi \int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|} \frac{dt}{t\theta(t)}\right) \log M(|z_n|, f).$$

结合(3.7)和 $N \leqslant \frac{1}{2}|z_n|^{(1-\eta)(\mu-\varepsilon)}$，上式将导致

$$18\sqrt{2} \log M(|z_n|, f) \geqslant |z_n|^{(1-\eta)(\mu-\varepsilon)} \exp\left(\pi \int_{2|z_n|^{1-\eta}}^{\frac{1}{2}|z_n|} \frac{dt}{t\theta(t)}\right).$$

据(3.8)式就有

$$\log 18\sqrt{2} + \log\log M(|z_n|, f) \geqslant (1-\eta)(\mu-\varepsilon)\log|z_n| + \frac{\pi}{2\pi-\sigma}(\eta \log|z_n| - \log 4),$$

两边除以 $\log|z_n|$ 并取上极限($n \to \infty$)就得

$$\lambda \geqslant (1-\eta)(\mu-\varepsilon) + \frac{\eta\pi}{2\pi-\sigma}.$$

再令 $\varepsilon \to 0^+$ 便得

$$\lambda \geqslant (1-\eta)\mu + \frac{\eta\pi}{2\pi-\sigma}.$$

由于 f 是正则增长的，即 $\lambda=\mu$，故有上式得 $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2\pi-\sigma} > \frac{1}{2}$，这与条件 f 的级不超过 $\frac{1}{2}$ 相矛盾. 定理1遂证毕.

4 定理 1 的应用

作为定理 1 的应用，我们有下列推论. 由于它们的证明是类似的，因此我们只给出定理 4 的证明.

定理 2 设 $f(z)$ 是开平面上正则增长(即级与下级相等) 的整函数，其级 λ 满足 $0<\lambda\leqslant 1/2$. 又 $L:\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 为一条自原点出发的射线，则或者 L 为 $f(z)$ 的 Julia 方向，或者在包含 L 的某个角域内当 $|z|\to\infty$ 时一致地有 $|f(z)|\to\infty$.

定理 3 设 $f(z)$ 是开平面上正则增长(即级与下级相等) 的整函数，其级 λ 满足 $0<\lambda\leqslant 1/2$. 又 $L:\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 为一条自原点出发的射线，则或者 L 为 $f(z)$ 的杨 - 张方向(即在包含 L 的任意小角域内，对满足条件 $\frac{m+1}{k}+\frac{1}{l}<1$ 的任意三个自然数 k,l,m 和任意有穷复数 $a,b(\neq 0)$，$f-a$ 的重级小于 k 的零点数和 $f^{(m)}-b$ 的重级小于 l 的零点数至少有一为无穷)，或者在包含 L 的某个角域内，有某个自然数 m 使得当 $|z|\to\infty$ 时一致地有 $|z|^{-m}|f(z)|\to\infty$，特别地 $|f(z)|\to\infty$.

定理 4 设 $f(z)$ 是开平面上正则增长(即级与下级相等) 的整函数，其级 λ 满足 $0<\lambda\leqslant 1/2$. 又 $L:\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$ 为一条自原点出发的射线，则或者 L 为 $f(z)$ 的 Haymann 方向(即在包含 L 的任意小角域内，对任何自然数 n，f^nf' 能取到任意有穷非零复数无穷多次)，或者在包含 L 的某个角域内，有某个自然数 n 使得当 $|z|\to\infty$ 时一致地有 $|z|^{-\frac{1}{n+1}}|f(z)|\to\infty$，特别地 $|f(z)|\to\infty$.

证明 如果 $L:\arg z=\theta$ 不是 f 的 Haymann 方向，即在包含 L 的某个小角域 $\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma)$ 内，对某个自然数 n，f^nf' 取某个有穷非零复数 a 只有有限多次，因此有正数 r_0 使得 f^nf' 在 $\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma;r_0,+\infty)$ 内不取复数 a. 记 $f_s(z)=2^{-\frac{s}{n+1}}f(2^sz)$，则有 $f_s^n(z)f'_s(z)=f^n(2^sz)f'(2^sz)$ 知函数族 $\{f_s(z)\}_{s\geqslant s_0=2+[\log r_0]}$ 于区域 $\Omega(\theta-\sigma,\theta+\sigma;\frac{1}{2},4)$ 内满足 $f_s^n(z)f'_s(z)\neq a$. 于是由[6, Thm3.22]，函数族 $\{f_s(z)\}$ 正规，再据 Marty 定则，存在常数 C 使得

$$\frac{|f'_s(z)|}{1+|f_s(z)|^2}\leqslant C,\quad z\in\overline{\Omega}(\theta-\frac{\sigma}{2},\theta+\frac{\sigma}{2};1,2),\quad s=s_0,s_0+1,\cdots.$$

由此不难得

$$\frac{|z|^{-\frac{1}{n+1}+1}|f'(z)|}{1+|z|^{-\frac{2}{n+1}}|f(z)|^2}\leqslant C,\quad z\in\overline{\Omega}(\theta-\frac{\sigma}{2},\theta+\frac{\sigma}{2};2^{s_0},+\infty).$$

于是由定理 1 知在包含 L 的某个角域内当 $|z|\to\infty$ 时有

$$|z|^{-\frac{1}{n+1}}|f(z)|\to\infty.$$

参考文献：

[1] YOSHIDA H. *Julia directions of entire functions of smooth growth* [J]. Nagoya Math. J., 1982, **87**: 41—57.

[2] 杨 乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社，1982.

YANG Le. *Value Distribution Theory and New Researchs* [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese)

[3] 张广厚. 整函数与亚纯函数理论 [M]. 北京：科学出版社,1986.
ZHANG Guang-hou. *Entire and Meromorphic Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1986. (in Chinese)

[4] 张广厚. 整函数与亚纯函数的亏值、渐近值和茹利雅方向的关系的研究 [J]. 中国科学(增刊), 1978, 1—80.
ZHANG Guang-hou. *Research of relations between deficient values, asymptotic values and Julia directions of entire and meromorphic functions* [J]. Sc. Sinica, Supp., 1978, 1—80. (in Chinese)

[5] TSUJI M. *Potential Theory in Modern Function Theory* [M]. Maruzen, Tokyo: 1959.

[6] 顾永兴. 亚纯函数正规族 [M]. 成都：四川教育出版社,1991.
GU Yong-xing. *Normal Families of Meromorphic Functions* [M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1991. (in Chinese)

On a Problem of H. Yoshida

CHANG Jian-ming

(Dept. of Math., Changshu College, Jiangsu 215500, China)

Abstract: In this note, we discuss a problem posed by H. Yoshida about the distribution of Julia directions of entire functions and give an affirmative answer not only for Juliadirections but also for some other directions of entire functions.

Key words: entire function; Julia direction; problem of H. Yoshida.