第22卷第4期 数学研究与评论 Vol. 22 No. 4
2002年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 2002

l-群的极小素子群*

吕新民[1]， 漆芝南[2]

(1. 南方冶金学院理学院，江西 赣州 341000；2. 南昌大学数学系，江西 南昌 330047)

摘 要：本文研究l-群的极小素子群，主要证明如下结果：设G是一个l-群. (1) $N \in \Gamma_m(G)$，则$N = a^{\perp}$当且仅当$\{P_{N^C}\}$是一个归纳集；(2) $g \in G^+$，如果g是特殊的，且g的唯一值是原子，则$g^{\perp} \in \Gamma_m(G)$；(3)$G \in B_{\infty}$，$\Gamma_1(G)$是原子的当且仅当$\Gamma_m(G) \subseteq \Gamma_1(G)$.

关键词：l-群；极小素子群；正则子群；原子.

分类号：AMS(2000) 06F15/CLC O153.1

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2002)04-0647-04

极小素子群是整个l-群结构理论研究的强有力工具之一，因而一直倍受关注[1-3]. 由于素子群对 通常集合意义下的交未必封闭，极小素子群自身的结构是通过一种称为超滤子的工具来实现的. 已获得一个非常重要的结果：即设G是l-群，P是G的极小素子群当且仅当$P = \bigcup \{a^{\perp} \mid a \in G^+ \setminus P\}$. 那么在什么条件下，任意$l$-群的极小素子群具有形式$P = a^{\perp}$呢?这一直是$l$-群结构理论研究中的一个十分有趣的问题. 本文试图首先对这一问题作初步探讨. 除此之外，我们还将沿用[4、5]中的方法，探讨上述问题的反问题，并且在扭类B_{∞}中将$\Gamma_1(G)$的DCC(降链条件)作进一步推广.

设G是l-群，$C(G)$表示G的凸l-子群格，$\Gamma(G)$表示G的所有素子群所成之集，$\Gamma_m(G)$表示G的所有极小素子群所成之集，$\Gamma_1(G)$表示G的所有正则子群所成之集. 下文中所涉及的概念与符号除非特别注明外均是标准的，见[6].

设G是l-群，A是G的一个非空子集，记$A^C = G^+ \setminus A$，$P_{A^C} = \{a^{\perp} \mid a \in A^C\}$，则

$$\bigcup P_{A^C} = \bigcup \{a^{\perp} \mid a \in A^C\}.$$

命题 1 G是l-群，，则$A \in C(G)$是素的当且仅当$\bigcup P_{A^C} \subseteq A$.

证明 必要性由A之素性可直接得到. 下证充分性. 若结论不成立，必存在$a_i \in A^C (i = 1,2)$，$a_1 \wedge a_2 = 0$，则$a_1 \in a_2^{\perp} \subseteq \bigcup P_{A^C} \subseteq A$矛盾.

由此易得

命题 2 G是l-群，$A \in C(G)$，若满足下列条件之一，则A必是素的.

(1) 存在$B \in C(G)$，且$B \subseteq A$且$\bigcup P_{B^C} \subseteq A$.

(2) 存在$a \in G^+$，$\bigcup P_{A^C} = a^{\perp}$.

* 收稿日期：1999-11-22

作者简介：吕新民(1965-)，男，湖北建始人，硕士，副教授.

(3) 存在 $0 \neq B \in C(G)$, $\bigcup P_{A^C} = B^{\perp}$.

(4) 存在 $M \in \Gamma_m(G)$, $\bigcup P_{A^C} \subseteq M$.

G 是 l- 群,$M \in \Gamma(G)$,G^+ 的子集 $K = G^+ \setminus M$ 称为 G 上的超滤子,如果 K 是满足条件:对于 $\forall\, h,k \in K, 0 < h \wedge k \in K$ 的 G^+ 的极大子集. 由[6]知:$K \to \bigcup \{k^{\perp} \mid k \in K\}$ 是 G 的超滤子所成之集与 $\Gamma_m(G)$ 之间的 1-1 对应,其逆对应为 $\overline{K} \to G^+ \setminus \overline{K}$.

命题 3 G 是 l- 群,$M \in \Gamma(G)$,N 表示包含在 M 中的所有极小素子群之交,则

$$N = \bigcup P_{M^C}.$$

证明 对于 $\forall\, 0 < x \in \bigcup P_{M^C}$,存在 $y \in M^C$,使得 $x \in y^{\perp}$,$x \wedge y = 0$,令 P 是包含在 M 中的任一极小素子群,因 $y \notin M$,$y \notin P$,由 P 之素性 $x \in P$,从而 $x \in N$,

$$\bigcup P_{M^C} \subseteq N.$$

又对 $\forall\, 0 < b \notin \bigcup P_{M^C}$,必然对于 $\forall\, a \in M^C$,$a \wedge b > 0$,易于验证

$$K_0 = \{b\} \cup \{a \wedge b \mid a \in M^C\} \cup M^C$$

是 G 上的一个滤子. 由 Zorn 引理,不难将 K_0 扩充成 G 上的一个超滤子 $K \supseteq K_0$. 令 $\overline{K} \in \Gamma_m(G)$,因 $M^C \subseteq \overline{K}^c$,$\overline{K} \subseteq M$,而 $b \notin \overline{K}$,则 $b \notin N$,故

$$N = \bigcup P_{M^C}.$$

S 是一个偏序集,S 称为是归纳的,如果 S 的任何一个链均有上界. 显然如果 S 是归纳的,由 Zorn 引理 S 必有极大元.

命题 4 G 是 l- 群,$M \in \Gamma(G)$,N 表示包含在 M 中的所有极小素子群之交,则

$$N = a^{\perp}\ (a \in M^C)$$

当且仅当 $\{P_{M^C}\}$ 是归纳的.

证明 *必要性*. 由命题 3,$N = \bigcup P_{M^C} = \bigcup \{b^{\perp} \mid b \in M^C\} = a^{\perp}\ (a \in M^C)$,则 $a^{\perp}$ 是 $\{P_{M^C}\}$ 中的最大元,显然 $a^{\perp}$ 是 $\{P_{M^C}\}$ 中任何一个链的上界,故 $\{P_{M^C}\}$ 是归纳的.

充分性. 设 $\{P_{M^C}\}$ 是归纳的,则 $\{P_{M^C}\}$ 必有极大元,记为 $a^{\perp}\ (a \in M^C)$. 下证 $a^{\perp}$ 是 $\{P_{M^C}\}$ 中的最大元. 令是 $b^{\perp}\ (b \in M^C)$ 是 $\{P_{M^C}\}$ 中的任一个元,由于 $a^{\perp} \vee b^{\perp} \subseteq (a \wedge b)^{\perp}$,从而

$$a^{\perp} \subseteq (a \wedge b)^{\perp},$$

而 $a \notin M$ 且 $b \notin M$,由 M 之素性,

$$a \wedge b \notin M, a \wedge b \in M^C, (a \wedge b)^{\perp} \in \{P_{M^C}\},$$

由 $a^{\perp}$ 之极大性,$a^{\perp} = (a \wedge b)^{\perp} \supseteq b^{\perp}$,故 $a^{\perp}$ 是 $\{P_{M^C}\}$ 中的最大元, $\bigcup P_{M^C} = a^{\perp}$,由命题 3 知

$$N = a^{\perp}.$$

由此易得

定理 5 G 是 l- 群,$N \in \Gamma_m(G)$,则 $N = a^{\perp}$ 当且仅当 $\{P_{N^C}\}$ 是归纳的.

G 是 l- 群,$G_\gamma \in \Gamma_1(G)$,G_γ 称为 $\Gamma_1(G)$ 的一个原子,如果对于 $\forall\, G_\alpha \in \Gamma_1(G)$,且 $G_\alpha \subseteq G_\gamma$,必有 $G_\alpha = G_\gamma$. 如果 $\Gamma_1(G)$ 的每一个元均包含一个原子,称 $\Gamma_1(G)$ 是原子的.

一个很自然的问题:对于 $\forall\, g \in G^+$,在什么条件下,$g^{\perp} \in \Gamma_m(G)$ 呢?我们有

定理 6 G 是 l- 群,$g \in G^+$,如果 g 是特殊的且 g 的唯一值是原子,则 $g^{\perp} \in \Gamma_m(G)$.

证明 设 G_γ 是 g 的唯一值,K 是 $G(g)$ 的极大凸 l- 子群,由[7]知 $G_\gamma = K \boxplus g^{\perp}$.

先证 $G_\gamma \in \Gamma_m(G)$. 由 Zorn 引理,存在 $P \in \Gamma_m(G)$ 且 $P \subseteq G_\gamma$,假定 $G_\gamma \notin \Gamma_m(G)$,则 $P \subset G_\gamma$,

于是可取 $0 < a \in G_\gamma \backslash P$,再次利用 Zorn 引理,可将 P 扩充成 a 的值 $G_a \supseteq P$,从而 G_a 与 G_γ 可比较,因 $a \in G_\gamma$ 而 $a \notin G_a$,则 $G_a \subset G_\gamma$,这与 G_γ 是原子相矛盾.

下证 $K = 0$,若不然,取 $0 < k \in K$,$k \in G_\gamma$,但 $G_\gamma \in \Gamma_m(G)$,则 $k^\perp \not\subseteq G_\gamma$. 取 $0 < h \in k^\perp \backslash G_\gamma$,则 $h \wedge k = 0$,以下分两种情形讨论.

情形(i) 如果 $h \notin G(g) \boxplus g^\perp$,因 g 是特殊的,$G(g)$ 必是 G 的字典子群,且 $G(g)$ 是其极大凸 l- 子群 K 的字典式扩张,必有 $g > k$,又 $h \notin G(g) \boxplus g^\perp$,从而 $h > G(g)$,则

$$h > g > k,$$

这与 $h \wedge k = 0$ 矛盾.

情形(ii) 如果 $h \in G(g) \boxplus g^\perp$,则必存在 $0 < t \in G(g) \backslash k$ 及 $0 < x \in g^\perp$,使得

$$h = t + x \geqslant t > k,$$

这仍然与 $h \wedge k = 0$ 矛盾.

由此 $M = g^\perp$,故 $g^\perp \in \Gamma_m(G)$.

早在 1967 年,Pederson F 就证明了:$\Gamma_1(G)$ 满足 DCC 当且仅当 $\Gamma(G) = \Gamma_1(G)$. 显然,若 $\Gamma_1(G)$ 满足 DCC,则 $\Gamma_1(G)$ 是原子的. 这里有

定理 7 $G \in B_\omega$[3],$\Gamma_1(G)$ 是原子的当且仅当 $\Gamma_m(G) \subseteq \Gamma_1(G)$.

证明 充分性是显然的.

必要性. 对于 $\forall\ P \in \Gamma_m(G)$,存在 $\Gamma_1(G)$ 的一个根 $\{G_\gamma | \gamma \in \Lambda\}$ 使得 $\bigcap_{\gamma \in \Lambda} G_\gamma = P$. 从根中取出 G_{γ_1},因 $\Gamma_1(G)$ 是原子的,则 G_{γ_1} 必包含一个原子 G_1. 若对于 $\forall\ \gamma \in \Lambda$,$G_\gamma \supseteq G_1$,则

$$P = \bigcap_{\gamma \in \Lambda} G_\gamma \supseteq G_1,$$

由 P 之极小性,$P = G_1 \in \Gamma_1(G)$,结论成立. 若不然,根中必存在 $G_{\gamma_2} \subseteq G_{\gamma_1}$,$G_{\gamma_2} \not\supseteq G_1$,则

$$G_{\gamma_2} \supseteq G_2,$$

G_2 是原子. 若对于 $\forall\ \gamma \in \Lambda$,$G_\gamma \supseteq G_2$,则

$$P = \bigcap_{\gamma \in \Lambda} G_\gamma \supseteq G_2$$

从而 $P = G_2 \in \Gamma_1(G)$,结论成立. 若不然,根中必存在 $G_{\gamma_3} \subseteq G_{\gamma_2}$,$G_{\gamma_3} \not\supseteq G_2$,$G_{\gamma_3} \supseteq G_3$,这一过程不可能持续下去. 否则将得到 $\Gamma_1(G)$ 的一系列原子:$G_1, G_2, \cdots G_n \cdots$,由作法 $G_i \neq G_j (i \neq j)$ 且 $G_{\gamma_1} \supset G_i (\forall\ i)$. 从而 G_{γ_1} 包含无限多个互不相同的极小素子群,这与 $G \in B_\omega$ 矛盾. 必要性得证.

参考文献:

[1] CONRAD P. *The structure of an l-group that is determined by its prime subgroups* [J]. Lecture Notes in Pure and Applied Math. Marcel Mekler, 1980, **62**: 1—27.

[2] CONRAD P. *Minimal prime subgroups of lattice-ordered groups* [J]. Czech. Math. J, 1980, **30**(105): 280—295.

[3] ZHEN Xi-qian, QI Zhi-nan. *The complete sublattice of the lattice of convex l-subgroups of an l-group that is generated by its polar subgroups* [J]. Algebra Univers, 1997, **37**: 374—390.

[4] 漆芝南. 可换群的完整子半群[J]. 数学年刊, 1992, **13**(6): 739—745.

QI Zhi-nan. *Total subsemigroups of a commutative group* [J]. Chinese Annals Math, Ser. A, 1992, **13**

(6): 739—745. (in Chinese)
[5] 漆芝南. 阿贝尔群的完整子半群的若干结果[J]. 数学进展, 1995, **24**(2): 169—174.
QI Zhi-nan. *Some results of total subsemigroups of an Abelian group* [J]. Advances in Mathematics, 1995, **24**(2): 169—174. (in Chinese)
[6] GIASS A M W, HOLLAND W C. *Lattice-Ordered Groups* [M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.
[7] CONRAD P. *The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group* [J]. Gzech. Math. J, 1965, **15**(90): 110—123.

Minimal Prime Subgroups of an l- Group

LÜ Xin-min[1], QI Zhi-nan[2]
(1. College of Science, Southern Inst. of Metallurgy, Ganzhou 341000, China;
2. Dept. of Math., Nanchang University, Jiangxi 330047, China)

Abstract: In this paper, we investigate minimal prime subgroups of an l-group and prove the following results: Let G be an l-group. (1) $N \in \Gamma_m(G)$, then $N = a^{\perp}$ iff $\{P_N{}^C\}$ is an inductive set; (2) $g \in G^+$, if g is special and its unique value is an atom, then $g^{\perp} \in \Gamma_m(G)$; (3) $G \in B_m, \Gamma_1(G)$ is atomic iff $\Gamma_m(G) \subseteq \Gamma_1(G)$.

Key words: l-group; minimal prime subroup; regular subgroup; atom.