第23卷第3期 2003年8月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 23 No. 3 Aug. 2003

整环上几类矩阵空间的保持伴随矩阵线性算子*

唐孝敏， 曹重光
(黑龙江大学数学系，黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要：本文刻画了整环上的全矩阵空间、对称矩阵空间和上三角矩阵空间上保持伴随矩阵的线性算子的结构.

关键词：整环；矩阵空间；伴随矩阵；线性算子.
分类号：AMS(2000) 15A04/CLC number：O151.21
文献标识码：A 　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0564-03

1 引 言

线性保持问题一直是矩阵代数中一个非常活跃的研究课题，近来有作者对保持伴随矩阵的线性算子作了讨论. 文[1]刻划了无限域上全矩阵空间及对称矩阵空间的保持伴随矩阵的线性算子的结构；[2,3]把这个结论(并得出关于上三角矩阵空间的结论)推广到加法算子，并且把结果推广到任意域上；[4]则进一步得出了任意域的不同维数的矩阵空间上保持伴随矩阵的线性算子. 而本文则是刻画了上述问题在任意整环上的结论.

2 主要结果

一个整环有着很多好的性质. 设 R 为整环，F 为 R 的由 $a/b(a,b\in R)$ 生成的分式域. 以 $M_n(E)$，$S_n(E)$ 及 $T_n(E)$ 分别表示 $E(R$ 或 $F)$ 上全矩阵空间、对称矩阵空间和上三角矩阵空间. $V(E)$ 为上述三种空间之一. 由整环的性质，显然对任意的 $A\in V(F)$，都有 $s\in R$ 及 $B\in V(R)$ 使得 $A=\frac{1}{s}B$. 若 σ 为 $V(R)$ 上的线性同态，则易见 $\delta: A=\frac{1}{s}B\to\frac{1}{s}\sigma(B)$，$\forall\ A\in V(F)$ 为 $V(F)$ 上的线性同态.

本文以 $\mathrm{adj}(A)$ 表示矩阵 A 的伴随矩阵，若 $V(E)$ 上的线性算子 σ 满足：$\sigma(\mathrm{adj}(A))=\mathrm{adj}(\sigma(A))$，我们则称 σ 为 $V(E)$ 上保持伴随矩阵的线性算子.

下面我们考查 $n\geq 3$ 时，$M_n(R)$，$S_n(R)$ 和 $T_n(R)$ 上保持伴随矩阵的线性算子($n=2$ 时的结

* 收稿日期：2001-01-08
基金项目：国家自然科学基金(10271021)，黑龙江省教育厅科研项目(10531130).
作者简介：唐孝敏(1973-)，男，博士，讲师.

论可经简单计算得出，本文略去).

引理 1 对于 $V(E)$ 上任意矩阵 A 和 B，下面两个等式成立：

(1) $A\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}(A)A=\det(A)I_n$;

(2) $\mathrm{adj}(AB)=\mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$.

证明 与[5]中域上的相同结论完全类似可证.

引理 2 若 σ 为 $V(R)$ 上保伴随矩阵的线性算子，则 δ 为 $V(F)$ 上的保伴随矩阵的线性算子.

证明 由等式

$$\delta(\mathrm{adj}(A)=\delta(adj(\frac{1}{s}B)=\delta(\frac{1}{s^{n-1}}(\mathrm{adj}(B)))=\frac{1}{s^{n-1}}\sigma(\mathrm{adj}(B))=\frac{1}{s^{n-1}}\mathrm{adj}(\sigma(B))$$

$$=\mathrm{adj}(\frac{1}{s}\sigma(B))=\mathrm{adj}(\delta(A)),$$

知结论成立.

定理 1 σ 为 $M_n(R)$ 上保伴随矩阵的线性算子当且仅当 σ 为下述形式之一：

(i) $\sigma(B)=bQBQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R)$;

(ii) $\sigma(B)=bQB^TQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R)$;

其中 $Q\in GL_n(R)$，$b\in R$ 且 $b^{n-2}=1$.

证明 充分性由引理 1 显然成立，现往证必要性.

由 σ 为 $M_n(R)$ 上保伴随矩阵的线性算子及引理 2，我们应用[2]中定理 2 关于域上的结论可得：

$$\delta(\frac{1}{s_1}B)=\frac{t}{s}(\frac{1}{s_2}Q)(\frac{1}{s_1}B)(\frac{1}{s_2}Q)^{-1},\forall\ \frac{1}{s_1}B\in M_n(F);$$

或

$$\delta(\frac{1}{s_1}B)=\frac{t}{s}(\frac{1}{s_2}Q)(\frac{1}{s_1}B)^T(\frac{1}{s_2}Q)^{-1},\forall\ \frac{1}{s_1}B\in M_n(F),$$

其中 $\frac{1}{s_2}Q$ 为 $M_n(F)$ 上的可逆阵. 由此易见

$$s\sigma(B)=tQBQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R),\text{或 } s\sigma(B)=tQB^TQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R),$$

其中 $Q\in GL_n(R)$.

若 $s\sigma(B)=tQBQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R)$，则由 $s\sigma(I_n)=tI_n$ 有 $s|t$.

令 $b=\frac{t}{s}$，则有 $\sigma(B)=bQBQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R)$. 再由 $\mathrm{adj}(\sigma(I_n))=\sigma(I_n)$ 可得 $b^{n-2}=1$.

同理，若 $s\sigma(B)=tQB^TQ^{-1},\forall\ B\in M_n(R)$，可推出 $\sigma(B)=bQB^TQ^{-1}$. □

对于 $S_n(R)$ 和 $T_n(R)$ 上的保伴随矩阵问题，注意到[2]中定理 1 和[3]中定理，我们应用与上述定理 1 完全类似的证明方法可得如下两个定理：

定理 2 σ 为 $S_n(R)$ 上保伴随矩阵的线性算子当且仅当 σ 为下述形式：

$$\sigma(B)=bQBQ^{-1},\forall\ B\in S_n(R)$$

其中 $Q\in GL_n(R)$ 且 $QQ^T=aI_n$，$a\in R$ 且为单位，$b\in R$ 且 $b^{n-2}=1$.

定理 3 σ 为 $T_n(R)$ 上保伴随矩阵的线性单射算子当且仅当 σ 为下述形式之一：

(i) $\sigma(B)=bQBQ^{-1},\forall\ B\in T_n(R)$,

(ii) $\sigma(B)=bQB^{\delta}Q^{-1}$, $\forall\ B\in T_n(R)$,

其中 $Q\in T_n(R)$且可逆，$B^{\delta}=(b_{n+1-j,n+1-i})$，$b\in R$ 且 $b^{n-2}=1$.

参考文献：

[1] CHAN G H, LIM M H, TAN K K. *Linear preservers on matries* [J]. Linear Algebra Appli., 1993, **93**: 67—80.

[2] TANG Xiao-min, ZHANG Xian, CAO Chong-guang. *Additive adjugate preservers on the matrices over fields* [J]. Northeast. Math. J., 1999, **15**(2): 246—252.

[3] TANG Xiao-min, ZHANG Xian. *Additive adjugate preserves on the triangular matrices over fields* [J]. Hunan Annals of Math., 1998, **18**(3): 51—53.

[4] TANG Xiao-min. *Linear operators preserving adjoint matrix between matrix spaces* [J]. Linear Algebra Appli., 2003, to appear.

[5] 任化民，于庚蒲，原永久，等. 线性代数习题课讲义 [M]. 长春：吉林大学出版社，1990.
REN Hua-min, YU Geng-pu, YUAN Yong-jiu et al. *The Solutions to Linear Algebra Problems* [M]. Changchun: Jilin Univ. Press, 1990. (in Chinese)

Linear Operators Preserving Adjoint Matrix on Several Spaces of Matrices over Domain

TANG Xiao-min, CAO Chong-guang

(Dept. of Math., Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, we characterize the linear operators preserving adjoint matrices on the spaces of all matrices, symmetric matrices and upper triangular matrices over domain.

Key words: domain; space of matrices; adjoint matrices; linear operator.