第23卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 23 No. 4
2003年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 2003

华蘅芳数在幂和问题中的新应用*

罗　见　今
(内蒙古师范大学科学史研究所，内蒙古 呼和浩特 010022)

摘　要：自然数的幂和问题具有悠久的历史，亦不乏现代的兴趣. 一般学者不了解清代数学家华蘅芳的成果. 本文改进了华氏数的定义；针对该问题建立了新的取盒--放球模型，给出幂和的组合解释；应用华氏数获得了简捷的幂和公式. 文末介绍了华氏数的历史来源.

关键词：自然数的幂的和；华氏数；组合模型；斯特灵数；华蘅芳.
分类号：AMS(2000) 05A, 01A25/CLC number: O157, O11
文献标识码：A　　　**文章编号**：1000-341X(2003)04-0750-07

1　华氏数 h_k^n 的新定义

1.1 定义　满足以下递推关系的数 h_k^n，称为华氏数：

(i) $h_0^0=1$；$h_k^n=0$，当 $k<0$ 或 $k>n$ 时；　(ii) $h_k^n=k(h_{k-1}^{n-1}+h_k^{n-1})$，　　(1)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	2					
3	0	1	6	6				
4	0	1	14	36	24			
5	0	1	30	150	240	120		
6	0	1	62	540	1560	1800	720	
7	0	1	126	1806	8400	16800	15120	5040

表1　华氏数 h_k^n

数 h_k^n 的命名，可参见文末历史注记. 本文提出 h_k^n 数的组合意义：

定义　将 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子里，不允许有空盒，不同放法数为 h_k^n.

例1　将 $n=4$ 个球 a,b,c,d 放入 $k=2$ 个盒子，无空盒，共有 $h_2^4=14$ 种放法，即 $a\to1,bcd\to2$；$b\to1,acd\to2$；$c\to1,abd\to2$；$d\to1,abc\to2$；$ab\to1,cd\to2$；$ac\to1,bd\to2$；$ad\to1,bc\to2$. 以上

* 收稿日期：2001-05-07
作者简介：罗见今(1942-)，男，教授，西北大学数学史专业博士生导师.

7 种放法中将盒子标号 1,2 互换,则共得 14 种.

1.2 组合解释

规定 $h_0^0=1$. $h_0^n=0(n\neq 0)$:没有盒子,故无放法.

$h_1^n=1$:将 n 个不同的球放入 1 个盒子,只有 1 种放法.

$h_n^n=n!$:将 n 个不同的球放入 n 个不同的盒子,无空盒,有 $n!$ 种放法.

$h_2^n=2^n-2$:要把 n 个不同的球 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 恰放入标号为 1,2 的盒子里,无空盒,可任取 1 球如 a_n,置入 1 盒中;对其余 $n-1$ 个球,或放入 1 盒,或放入 2 盒,共有 2^{n-1}种放法.其中将 $n-1$ 个球皆置 1 盒的 1 种放法使 2 盒空,应从 2^{n-1}中减去,得 $2^{n-1}-1$ 种放法.将 a_n 置入 2 盒中亦可使所余 $n-1$ 个球有 $2^{n-1}-1$ 种放法.据加法法则,$h_2^n=2^n-2$.

$h_{n-1}^n=(n-1)!\binom{n}{2}$:要把 n 个不同的球恰放入 $n-1$ 个不同的盒子里,无空盒,必有 1 个盒放入 2 球,此 2 球从 n 球中选取,有$\binom{n}{2}$种选法;而放入 $n-1$ 个不同的盒子,有$(n-1)!$ 种放法.据乘法法则,$h_{n-1}^n=(n-1)!\binom{n}{2}$.

1.3 式(1) $h_k^n=k(h_{k-1}^{n-1}+h_k^{n-1})$的组合证明

证明 要把 n 个不同的球 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 恰放入 k 个不同的盒子里,无空盒.可先任取 1 球,例如 a_n,然后把放法分为两类:A. a_n 单放在 1 个盒中,放法为 k 种,其余 $n-1$ 个球放入 $k-1$ 个盒中,放法为 h_{k-1}^{n-1}种.据乘法法则,放法共有 kh_{k-1}^{n-1}种.B. a_n 不单放在一盒中.可先把其余 $n-1$ 球放入 k 个盒中,有 h_k^{n-1} 种放法.对于其中任一种放法,加入 a_n 的方法有 k 种.据乘法法则,放球的方法数是 kh_k^{n-1} 种.由加法法则,式(1)成立.□

华氏数与第二类斯特灵数 $S_{n,k}$有关系

$$h_k^n=k!S_{n,k}. \tag{2}$$

2 数 h_k^n 的性质

2.1

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k^n=(-1)^n. \tag{3}$$

证明 应用式(1),因 $h_0^0=1$,当 $n>1$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(h_{k-1}^{n-1}+h_k^{n-1}) &= -h_0^{n-1}-h_1^{n-1}+2h_1^{n-1}+2h_2^{n-1}-3h_2^{n-1}-3h_3^{n-1}+\cdots+\\ &(-1)^n nh_{n-1}^{n-1}=-h_0^{n-1}+h_1^{n-1}-h_2^{n-1}+h_3^{n-1}-\cdots+\\ &(-1)^n h_{n-1}^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k h_k^{n-2}=\cdots\\ &=(-1)^n h_0^0=(-1)^n.\end{aligned}$$

例 2 表 1 中每横行 k 为奇数,各 h_k^n 之和与 k 为偶数,各 h_k^n 之和恒差为 1.

当 $n=4$ 时,$-1+14-36+24=1$;当 $n=5$ 时,$-1+30-150+240-120=-1$.

2.2

$$h_k^n=\sum\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}, \tag{4}$$

式中求和是对方程 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 的一切正整数解来求，即诸 $n_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 皆不为零.

证明 式左表示将 n 个不同的球恰放入 k 个不同的盒子(无空盒)的放法数. 而 $\binom{n}{n_1n_2\cdots n_k}$ 则表示把 n 个不同的球恰放入 k 个不同的盒子，且使第 1 个盒子有 n_1 个球，第 2 个盒子有 n_2 个球，…第 k 个盒子有 n_k 个球的放法数；对所有 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 的正整数解求和以后，就得到将 n 个不同的球恰放入 k 个不同盒子的放法数. □

如果 $\binom{n}{n_1n_2\cdots n_k}$ 中诸 n_i 可为零，则它是多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ 中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 项的系数，也是多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的排列数，并有 $k^n=\sum\binom{n}{n_1n_2\cdots n_k}$，式中求和是对方程 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 的一切非负整数解来求.

2.3 **定理**

华氏数 h_k^n 的指数生成函数是

$$(e^x-1)^k=\sum_{n=k}^{\infty}h_k^n\frac{x^n}{n!}. \tag{5}$$

证明 应用多项式定理和式(4)，

$$(e^x-1)^k=(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^k=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=0,\text{当 } n<k;a_n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}=\sum\binom{n}{n_1n_2\cdots n_k}=h_k^n,\text{当 } n\geqslant k.$$

式中求和是对方程 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 的一切正整数解来求. 于是式(5)成立，定理得证.

例 3 式(5) $k=3$，$(e^x-1)^3=\sum_{n=3}h_3^n\frac{x^n}{n!}=6\frac{x^3}{3!}+36\frac{x^4}{4!}+150\frac{x^5}{5!}+540\frac{x^6}{6!}+\cdots$.

2.4 **递推公式**

$$h_k^{n+1}=k\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}h_{k-1}^r. \tag{6}$$

证明 将 $n+1$ 个不同球 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 放入 k 个不同的盒子(无空盒)中的方法可以按下方式来进行：将球 a_{n+1} 固定，从剩余的 n 个球中先挑选 r 个球放入 $k-1$ 个盒中，再将所剩 $n-r$ 球同 a_{n+1} 一起放入余下的一个盒子中，得方法数为 $k\binom{n}{r}h_{k-1}^r$；显然，球 a_{n+1} 可以和任意 $n-r$ 个球在一起. 故方法总数有式(6)成立. □

例 4 式(6)中，当 $n=4,k=3$：$h_5^3=150=3\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}h_2^r=3(6\cdot h_2^2+4\cdot h_2^3+1\cdot h_2^4)$.

2.5 **通项公式**

$$h_k^n=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}(k-r)^n. \tag{7}$$

证明 $(e^x-1)^k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{k-r}e^{(k-r)x}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(k-r)^n\frac{x^n}{n!}$，比较它与(5)式中 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数，知有(7)式成立. □

例 5 式(7)中当 $k>n$，式左恒为零. $k\leqslant n$ 时，有 $h_0^n=0,h_1^n=1,h_2^n=2^n-2$ 等.

特别有当 $k=n$ 时

$$h_n^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^n = n!. \tag{8}$$

3 幂和问题的组合解:取盒—放球模型

3.1 用华氏数表示的乘幂公式

$$m^n = \sum_{r=1}^{m}\binom{m}{k}h_k^n. \tag{9}$$

证明 式左表示将 n 个不同的球放到 m 个不同的盒子里,允许空盒,有 m^n 种放法.式右 $\binom{m}{k}$ 表示从 m 个不同盒子中选出 k 个的方法数,h_k^n 表示把 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子(无空盒)的放法数,据乘法法则,$\binom{m}{k}h_k^n$ 即把 n 个不同的球恰放入 k 个不同盒子的放法数.从 m 个盒子中取出 k 个,皆放球,而所余 $m-k$ 为空盒.当对 k 从 1 到 m 求和后,就得到 n 个不同的球放入 m 个不同盒子(允许空盒)的放法数.故式(9)成立. □

例 6 式(9)中,当 $m=6,n=5$ 时,式左 $6^5=7776$,式右为

$$\binom{6}{1}+30\binom{6}{2}+150\binom{6}{3}+240\binom{6}{4}+120\binom{6}{5}=7776,$$

即 5 个不同的球放入 6 个不同的盒子,允许空盒,共有 7776 种放法.

3.2 用华氏数表示的幂和公式

$$\sum_{r=1}^{m}r^n = \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k+1}h_k^n. \tag{10}$$

证明一 利用组合恒等式$\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k-1}+\binom{m-1}{k}$和式(9):

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k+1}h_k^n = \sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}\right]h_k^n = m^n + \sum_{k=1}^{m-1}\left[\binom{m-1}{k}+\binom{m-1}{k+1}\right]h_k^n$$

$$= m^n + (m-1)^n + \sum_{k=1}^{m-2}\left[\binom{m-2}{k}+\binom{m-2}{k+1}\right]h_k^n$$

$$= m^n + (m-1)^n + \cdots + 3^n + 2^n + 1^n.$$

证明二 利用组合恒等式 $\sum_{r=1}^{m}\binom{r}{k}=\binom{m+1}{k+1}$ 和式(9):

$$\sum_{r=1}^{m}r^n = \sum_{r=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\binom{r}{k}h_k^n\right] = \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{m}\binom{r}{k}\right]h_k^n = \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k+1}h_k^n.$$

将式(10)写成如下形式

$$\sum_{r=1}^{m}r^n = \sum_{k=1}^{1}\binom{1}{k}h_k^n + \sum_{k=1}^{2}\binom{2}{k}h_k^n + \cdots + \sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}h_k^n + \cdots + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h_k^n$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k+1}h_k^n. \tag{11}$$

自然数前 m 项 n 次幂的和的组合意义是:

式(11)左边:将 n 个不同的球放入 $r(1\leqslant r\leqslant m)$ 个不同的盒子,允许空盒,共有 r^n 种放法;现有 m 个不同的盒子,对 r 从 1 到 m 求和,所得放球方法的总和,即为幂和.

式(11)的展开式：将 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子，不允许空盒，放法有 h_k^n 种；当 $1\leqslant k\leqslant r\leqslant m$，每次从 r 个盒子中任取 k 个，不同取法有 $\binom{r}{k}$ 种，将 n 个不同的球放入(这时所余 $r-k$ 个盒子空)；分别对 k 和 r 从 1 到 m 求和，所得取盒放球方法的总和，即为幂和.

式(11)的右边：从 $m+1$ 个不同的盒子中任取 $k+1$ 个，有 $\binom{m+1}{k+1}$ 种选法；将 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子，不允许空盒，有 h_k^n 种放法；现将 $k+1$ 个盒子中每个先置于一旁，而将 n 个球放入 k 个盒子(这时 $m-k+1$ 个盒子空)，根据乘法法则，放法有 $\binom{m+1}{k+1}h_k^n$ 种. 对 k 从 1 到 m 求和，所得取盒一放球方法的总和，即为幂和.

例 7　式(11)中，当 $m=4, n=5, 1^5+2^5+3^5+4^5=1300$，而

$$\sum_{k=1}^{4}\binom{5}{k+1}h_k^5=\binom{5}{2}+30\binom{5}{3}+150\binom{5}{4}+240\binom{5}{5}=1300.$$

4　历史注记

华蘅芳(1833—1902)，字若汀，江苏金匮(今无锡市)人. 清末著名数学家[1]. 他的文集《行素轩算稿》[2]收有 1872—1882 年间写成的 6 种著作，其中第 4 种是《积较术》.

华氏在研究有限差分理论时构造了“诸乘方正元积较表”，定义了 h_k^n，称为“第一种华氏数”[3]如表 2.

1					
0	1				
0	−1	2			
0	1	−6	6		
0	−1	14	−36	24	
0	1	−30	150	−240	120

表 2　第一种华氏数 h_k^n

1					
0	1/1				
0	1/2	1/2			
0	2/6	3/6	1/6		
0	6/24	11/24	6/24	1/24	
0	24/120	50/120	35/120	10/120	1/120

表 3　第二种华氏数 H_k^n

将他的算法表示成今天的形式，递推关系(“造表法”)为：

$$\text{(i) } h_0^0=1;\ h_k^n=0,\ k<0 \text{ 或 } k>n,\quad \text{(ii) } h_k^n=k(h_{k-1}^{n-1}-h_k^{n-1}). \tag{12}$$

据此，他进而获得乘幂公式

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}h_k^n\binom{x+k-1}{k} \tag{13}$$

及 x 为自然数时幂和公式

$$\sum_{x=1}^{m}x^n=\sum_{k=1}^{n}h_k^n\binom{m+k}{k+1}. \tag{14}$$

他建立的方法和体系中包含了式(14)，虽然他本人没有直接给出.

例 8　式(14)中，当 $m=4, n=5, 1^5+2^5+3^5+4^5=1300$，而

$$h_1^5\binom{5}{2}+h_2^5\binom{6}{3}+h_3^5\binom{7}{4}+h_4^5\binom{8}{5}+h_5^5\binom{9}{6}=1300$$

与式(10)结果相同，而计算稍繁.

华氏用 5 种方法递推出 h_k^n，足见对此计数函数的重视，本文的新定义(1)与华氏的(12)有

一个符号的差别.定义(1)可用于放球计数,且(10)式较(14)式为简.

华氏另有"积较还原表",定义的 H_k^n 称为"第二种华氏数"[3],如表 3.其现代形式为:

$$(\mathrm{i})\ H_0^0=1;H_k^n=0,k<0\text{ 或 }k>n\text{ 时}\quad(\mathrm{ii})\ H_k^n=\frac{-1}{n!}\sum_{r=k}^{n-1}h_r^nH_k^{r-1},\tag{15}$$

其中(ii)式可简化为

$$H_k^n=\frac{1}{n}H_{k-1}^{n-1}+\frac{n-1}{n}H_k^{n-1}.\tag{15$'$}$$

例 9 式(15)′中,当 $n=5,k=3$ 时,$H_3^5=\frac{1}{5}\frac{11}{24}+\frac{4}{5}\frac{6}{24}=\frac{35}{120}$.

数 H_k^n 的生成函数为

$$\binom{x+n-1}{n}=\sum_{k=0}^{n}H_k^nx^k.\tag{16}$$

华氏应用 h_k^n 和 H_k^n 两种计数函数,明确地给出了一组互反公式,即(13)和(16)式.他同时获得了式(8)的结果.

第一、二种华氏数 h_k^n 和 H_k^n 与第一、二种 Stirling 数 $s_{n,k}$和 $S_{n,k}$[4-8]具有关系

$$h_k^n=(-1)^{n+k}k!S_{n,k},\quad H_k^n=(-1)^{n+k}\frac{1}{n!}s_{n,k},\tag{17}$$

$$s_{n,k}=(-1)^{n+k}n!H_k^n,\quad S_{n,k}=(-1)^{n+k}\frac{1}{k!}h_k^n.\tag{18}$$

因此可以认为两种华氏数同两种 Stirling 数具有类似的构造.

参考文献:

[1] 罗见今. 清末数学家华蘅芳. 吴文俊.《中国数学史文集》[C]. 1辑,济南:山东教育出版社,1985,109—120.

LUO Jian-jin. *Mathematician Hua Heng-fang in the Qing Dynasty. WU Wen-jun, Editer, Collections on the History of Mathematics in China* [C]. No. 1, Jinan: Shandong Education Press, 1985, 109—120. (in Chinese)

[2] 华蘅芳.《行素轩算稿》四,《积较术》卷一 [M]. 1870年代著.

HUA Heng-fang. *Xing Su Xuan Suan Gao, Vol. 4, Ji Jiao Shu (A Method of Finite Difference) Vol. 1* [M]. 1870'. (in Chinse)

[3] 罗见今. 华蘅芳的计数函数和互反公式. 吴文俊.《中国数史论文集》[C]. 2辑,济南:山东教育出版社,1986,107—124.

LUO Jian-jin. *The Counting Fuctions and Inversion Formula by Hua Heng-fang Collection on the History of Mathematics in China* [C]. No. 2. Jinan: Shandong Education Press, 1986, 107—124. (in Chinese)

[4] MARTIN A. *Combinatorial Theory* [M]. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979, 93, 91, 473.

[5] JOHN R. *Combinatorial Identities* [M]. New York/London Sydney, 1968.

[6] 柯召,魏万迪.《组合论》[M]. 北京:科学出版社,1981,63—73.

KE Zhao, WEI Wan-di. *Combinatorial Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1981, 63—73. (in

Chinese)
[7] 罗见今. 李善兰对 Stirling 数和 Euler 数的研究 [J]. 数学研究与评论, 1982, 2(4): 173—182.
LUO Jian-jin. *A study on Stirling numbers and Euler numbers by LI Shan-lan* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1982, 2(4): 173—182. (in Chinese)
[8] 屈婉玲. 组合数学 [M]. 北京大学出版社,1989, 131—143.
QU Wan-ling. *Combinatorics* [M]. Peking University Press, 1989, 131—143. (in Chinese)

Sum of Powers of Integers: An Application of Hua's Numbers

LUO Jian-jin
(Institute of the History of Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China)

Abstract: Hua Heng-fang (1833—1902) was a famous mathematician in the end of Qing Dynasty. In his book *Ji Jiao Shu* (*A Method of Finite Difference*, 1870') Hua gave a formula of sum of powers of natural numbers using Hua's numbers. The study on sum of powers of natural numbers has a long history and a common interest today. Hua's numbers have good qualities but are not known by many mathematicians. Awaked by Hua's method only change one sign in Hua's definition and get a new formula of sum of powers of integer in this paper. This formula is very simple, and has some combinatorial significance. A box-taking and boll-putting combinatorial model is established also.

Key words: formula of sum of powers of integers; Hua's numbers; combinatorial model; Stirling numbers; mathematician Hua Heng-fang .