第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0076-08 文献标识码: A

布朗生灭过程及股票价格模型

冯广波 [1,2], 马超群 [1], 侯振挺 [3], 唐有荣 [4]
(1. 湖南大学工商管理学院, 湖南 长沙 410082; 2. 海南大学经济管理学院, 海南 海口 570228;
3. 中南大学铁道校区科研所, 湖南 长沙 410075; 4. 国防科技大学数学系, 湖南 长沙 410073)
(E-mail: fengguangbo2002@163.com)

摘 要: 本文明确地给出了一类布朗生灭过程的定义, 讨论了其一维分布、积分泛函的分布和矩, 得到了递推计算公式, 然后讨论了布朗生灭过程对股价模型的应用.

关键词: 布朗生灭过程; 马氏骨架过程; 积分型泛函; 股票价格模型.
MSC(2000): 60K15
中图分类: O211.62

0 引 言

设 $(\Omega, \overline{F}, P)$ 为一完备概率空间, (E, ε) 是一个可测空间. 记:

$$N_t = \overline{F}(X(u,\omega), 0 \le u \le t), N_\infty = \sup(N_t, t \ge 0),$$

$X = \{X(t,\omega), 0 \le t < \tau(\omega)\}$ 是一个定义在 $(\Omega, \overline{F}, P)$ 上, 取值于 E 的右连左极的随机过程.

定义 0.1 称随机过程 $X = \{X(t,\omega), 0 \le t < \tau(\omega)\}$ 为马氏骨架过程, 如果存在一列关于 N_∞ 的马氏时刻 $\{\tau_n\}_{n\ge 0}$ 满足:

1) $0 = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots$.

2) 对每个 τ_n 和定义在 (E, ε) 上的有界可测函数 f, 有

$$E[f(X(\tau_n + \cdot))|N_{\tau_n}] = E[f(X(\tau_n + \cdot))|X(\tau_n)], \quad P_{\tau_n} - \text{a.e.},$$

其中 P_{τ_n} 指在 $\tau_n(\omega) < \infty$ 的条件下的条件概率. 记 $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$.

定义 0.2 称马氏骨架过程, $X = \{X(t,\omega), 0 \le t < \tau(\omega)\}$ 为 (H, Q) 过程, 如果 X 在马氏时刻 $\{\tau_n\}_n \ge 0$ 以及本身满足齐次性. 即

$$E[f(X(\tau_n + \cdot, \omega))|\overline{F}(\tau_n)] = E_{X(\tau_n)}[f(X(\cdot,\omega))], \; E[\tau_{n+1}|\overline{F}(\tau_n)] = E(\tau_1),$$

$$h(t, X, A) = P(X(\tau_1) \in A, \tau_1 > t | X(0) = X_0),$$

$$q(t, X, A) = P(X(\tau_1) \in A, \tau_1 \le t | X(0) = X_0),$$

收稿日期: 2002-09-17
基金项目: 国家自然科学基金 (19871006/A010110)

由概率测度的性质知，当 A 固定时，$h(t,X,A),q(t,X,A)$ 是 $L\times\varepsilon$ 可测的，当 X,t 固定时是 (E,ε) 上的准分布，其中 L 表示 $[0,+\infty)$ 上一切勒贝格可测集的集合.

1 布朗生灭过程及一维分布

设 R 是实数集，E_0 为 R 的可数或有限子集.

定义 1.1 取值于 $(R,\overline{F}(R))$ 上的马氏骨架过程 $X(t,\omega)$ 称为布朗跳过程，若满足

1) $X(\tau_n)$ 取值于 E_0 上，对固定的 $\omega, X(t,\omega)$ 在 $[\tau_n(\omega),\tau_{n+1}(\omega)$ 上连续；

2) $X(t)$ 在 $[\tau_n(\omega),\tau_{n+1}(\omega)]$ 的时间内服从布朗运动.

令

$$Q=\begin{vmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -(a_n+b_n) & b_n & \cdots \end{vmatrix},$$

这里 $b_i>0(i\geq 0),a_i>0(i>0)$ 为方便计，补定义 $a_0=0$, 以后记：$c_i=a_i+b_i$.

定义 1,2 称布朗跳过程 $X=\{X(t,\omega)\}$ 为布朗生灭过程. 如果满足

$$0=\tau_0\leq\tau_1\leq\tau_2\leq\cdots \text{是生灭 } Q \text{过程的全部跳跃点}.$$

并称 τ_n 为 $X(t,\omega)$ 的跳跃点.

定理 1.1 布朗生灭过程 $X(t,\omega)$ 是 (H,Q) 过程且

$$h(h,i,A)=e^{-c_it}\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-i)^2}{2t}}\mathrm{d}y,\quad i\in E_0,\ A\in\overline{F}(R),$$

$$q(t,i,A)=[\mathbf{1}_A(i+1))\frac{b_i}{c_i}+\mathbf{1}_A(i-1)\frac{a_i}{c_i}](1-e^{-c_it}),\quad i\in E_0,\ A\in\overline{F}(R).$$

证明 $X(t,\omega)$ 是 (H,Q) 过程由定义知，显然成立，因此只须证明 $h(t,i,A)$ 及 $q(t,i,A)$ 的表达式.

$$\begin{aligned}
h(t,i,A)&=P_i(X(\tau_1)\in A,\tau_1>t)\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{[2^mt]}P_i(X(\tau_1)\in A,t+\frac{2^k-1}{2^m}\leq\tau_1<t+\frac{2^k}{2^m}|X(0)=i)\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{[2^mt]}P_i(t+\frac{2^k-1}{2^m}\leq\tau_1<t+\frac{2^k}{2^m})\cdot P_i(X(\tau_1)\in A)|t+\frac{2^k-1}{2^m}\leq\tau_1<t+\frac{2^k}{2^m})\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{[2^mt]}P_i(t+\frac{2^k-1}{2^m}\leq\tau_1<t+\frac{2^k}{2^m})\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-i)^2}{2t}}\mathrm{d}y\\
&=\int_t^\infty\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-i)^2}{2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}F(s)\\
&=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-i)^2}{2t}}e^{-c_it}\mathrm{d}y=e^{-c_it}\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-i)^2}{2t}}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t,i,A) &= P_i(X(\tau_1)\in A,\tau_1\le t) \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{[2^m t]} P_i(\frac{2^k-1}{2^m}\le\tau_1<\frac{2^k}{2^m})P_i(X(\tau_1)\in A|\frac{2^k-1}{2^m}\le\tau_1<\frac{2^k}{2^m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{[2^m t]} P_i(\frac{2^k-1}{2^m}\le\tau_1<\frac{2^k}{2^m})P_i(X(\tau_1)\in A) \\ &= \sum_{\substack{k\in A\\ k\neq i}}\frac{q_{ik}}{c_i}\int_0^t \mathrm{d}F(s) = [\mathbf{1}_A(i+1)\frac{b_i}{c_i}+\mathbf{1}_A(i-1)\frac{a_i}{c_i}](1-e^{-c_it}). \end{aligned}$$

其中

$$q_{ik}=\begin{cases} a_i, & k=i-1,\\ b_i, & k=i+1,\\ -c_i, & k=i,\\ 0, & k>i+1 \text{ 或 } k<i-1, \end{cases}$$

$F(s)$ 为 τ_1 的分布函数. □

令 $q^{*n}(t,i,j)=P(X(\tau_n)=j,\tau_n\le t|X(0)=i).n\ge 1$. 另规定

$$q^{*0}(t,i,j)=\begin{cases} 1, & \text{当 } i=j,\\ 0, & \text{当 } i\neq j. \end{cases}$$

定理 1.2

1) $q^{*1}(t,i,j)=q(t,i,j)=\begin{cases} \frac{b_i}{c_i}(1-e^{-c_it}), & j=i+1,\\ \frac{a_i}{c_i}(1-e^{-c_it}), & j=i-1,\\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$

2) $q^{*n}(t,i,j)=\int_0^t q(t-s,j-1,j)q^{*n-1}(\mathrm{d}s,i,j-1)+\int_0^t q(t-s,j+1,j)q^{*n-1}(\mathrm{d}s,i,j+1)$.

证明 (i) 1) 显然.

(ii) $P(X(\tau_n)=j,\tau_n\le t|(X(0)=i)=P(X(\tau_n)=j,X(\tau_{n-1})=j+1,\tau_n\le t|X(0)=i)+P(X(\tau_n)=j,X(\tau_{n-1})=j-1,\tau_n\le t|X(0)=i)$, 又

$$\begin{aligned} &P(X(\tau_n)=j,X(\tau_{n-1})=j+1,\tau_n\le t|X(0)=i) \\ &= \int_\Omega E[X(\tau_n)=j,X(\tau_{n-1})=j+1,\tau_n\le t|X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},X(0)]P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i) \\ &= \int_\Omega E[X(\tau_n)=j,\tau_n-\tau_{n-1}\le t-\tau_{n-1}|X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},X(0)]\cdot \\ &\quad I_{\{X(\tau_{n-1})=j+1\}}\cdot I_{\{\tau_{n-1}\le t\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i) \\ &= \int_\Omega q(t-\tau_{n-1},X(\tau_{n-1}),j)\cdot I_{\{X(\tau_{n-1})=j+1\}}\cdot I_{\{\tau_{n-1}\le t\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i) \\ &\xlongequal{\text{积分变换}} \int_0^t q(t-s,j+1,j)q^{*n-1}(\mathrm{d}s,i,j+1). \end{aligned}$$

同理

$$P(X(\tau_n)=j,X(\tau_{n-1})=j-1,\tau_n\le t|X(0)=i)=\int_0^t q(t-s,j-1,j)q^{*n-1}(\mathrm{d}s,i,j-1).$$

2) 式由此得证. □

令

$$P_i(t,A)=P(X(t)\in A|X(0)=i),\quad P(t,A)=P(X(t)\in A),\quad P_i=P(X(0)=i),$$

$$i\in E_0, A\in\varepsilon.$$

定理 1.3 $X(t,\omega)$ 的一维分布

$$P(t,A)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t h(t-s,k,A)\cdot q^{*n}(\mathrm{d}s,i,k)\cdot P_i.$$

证明

$$\begin{aligned}P_i(t,A)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(X(t)\in A,\tau_n\le t<\tau_{n+1}|X(0)=i)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega E[(X(t)\in A,\tau_n\le t<\tau_{n+1}|X(\tau_n),\tau_n,X(0)]\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega h(t-\tau_n,X(\tau_n),A)\cdot I_{\{\tau_n\le t\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\Omega h(t-\tau_n,X(\tau_n),A)\cdot I_{\{\tau_n\le t\}}\cdot I_{\{X(\tau_n)=k\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t h(t-s,k,A)\cdot q^{*n}(\mathrm{d}s,i,k),\end{aligned}$$

又显然 $p(t,A)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(t,A)\cdot p_i$, 故定理得证.

2 积分型泛函

设 $V(\cdot)$ 为 E 上非负有限可测函数，令

$$\begin{array}{ll}\eta(\omega)=\int_0^{\tau(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t, & \eta^{(n)}(\omega)=\int_0^{\tau_n(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t,\\ F_{ij}^{(n)}(t)=P(\eta^{(n)}\le t,X(\tau_n)=j|X(0)=i), & F_i(t)=P(\eta\le t|X(0)=i),\\ \Phi_{ij}^{(n)}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}F_{ij}^{(n)}(t), & \Phi_i(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}F_i(t),\\ \Psi_{ij}^{(n)}(\lambda)=1-\Phi_{ij}^{(n)}(\lambda), & \Psi_i(\lambda)=1-\Phi_i(\lambda),\\ T_{ij}^{n,p}=E[(\eta^{(n)})^p,X(\tau_n)=j|X(0)=i], & T_i^{n,p}=E[(\eta^{(n)})^p|X(0)=0],\\ T_i^n=E[\eta^p|X(0)=i], & \end{array}$$

并设 $\sigma_0=0,\sigma_n=\tau_n-\tau_{n-1},n\ge 1$, 令 $G_{ij}^{(n)}(t)=P(\int_0^{\sigma_n}V(X(s))\mathrm{d}s\le t,X(\sigma_n)=j|X(0)=i)$.

定理 2.1 $F_{ij}^{(n)}(t)$ 由递推公式唯一决定

$$F_{ij}(t)=G_{ij}(t)=P(\int_0^{\tau_1}V(X(s))\mathrm{d}s\le t,X(\tau_1)=j|X(0)=i),$$

$$F_{ij}^{(n+1)}(t)=\int_0^t F_{i-1,j}^{(n)}(t-s)\mathrm{d}G_{i,i-1}(s)+\int_0^t F_{i+1,j}^{(n)}(t-s)\mathrm{d}G_{i,i+1}(s). \tag{1}$$

证明 完全类似于定理 1.2 中的 2).

定理 2.2

$$\Psi_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=g_{i,i+1}(\lambda)\cdot\Psi_{i-1,j}^{(n)}(\lambda)+g_{i,j+1}(\lambda)\cdot\Psi_{i+1,j}^{(n)}(\lambda),$$

其中 $g_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}G_{ij}(t)$.

证明 由定理 2.1 中递推公式 (1) 式取 laplace-stieltjes 变换即可得出定理 2.2 的递推公式.

引理 2.1 设 $b(x,A)$ 对固定的 A, 是 x 的可测函数, 当 x 固定时, 是 (E,ε) 上的准分布; $C(x)$ 是非负可测函数, 则非负方程 $f(x)=\int_\varepsilon b(x,\mathrm{d}y)f(y)+C(x)$ 的最小非负解存在且唯一; 若令 $f_0=0,f_{n+1}(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C(x),\quad n\geq 0$, 则极限 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f^*(x)$ 存在, 且 $\{f^*(x):x\in E\}$ 为方程 $f(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+C(x)$ 的最小非负解.

证明 (i) 首先证明 $\{f^*(x):x\in E\}$ 为方程 $f(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+C(x)$ 的最小非负解. 显然, $f_2(x)=C(x)\geq f_0(x)$: 设 $f_n(x)\geq f_{n-1}(x)$, 则由 $b(\cdot,\cdot)$ 的非负性知

$$f_{n+1}(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C(x)\geq\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_{n-1}(y)+C(x)=f_n(x),$$

即 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为单调函数序列, 从而 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f^*(x)$ 的极限存在, 再根据引理 2.1 的非负方程及单调收敛定理, 便知 f^* 是定理 2.2 递推公式的非负解.

其次, 若 $R(x)$ 是定理 2.2 递推公式的任一非负解, 则易证 $R(x)\geq f_n(x)$, 从而 $R(x)\geq f^*(x)$

(ii) 定理 2.2 递推公式的最小非负解是唯一的.

若 $R(x)$ 是定理 2.2 递推公式的最小非负解, 则由 (i),$R(x)\geq f^*(x)$. 但 $R(x)$ 也是最小解, 故 $R=f^*$. □

引理 2.2 设 $C_n(x)\geq 0(n\geq 1,x\in E)$, 且 $\lim_{n\to\infty}C_n(x)=C(x)$. 若令

$$f_1(x)=C_1(x),f_{n+1}=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C_{n+1}(x),\quad n\geq 1.$$

则 $\lim f_n(x)=f(x)$ 存在且为方程 $f(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+C(x)$ 的最小非负解.

证明 注意到 $C_n(x)\uparrow C(x)$, 与引理 2.1 的证明类似.

定理 2.3 $\Psi_i(\lambda)$ 是非负方程

$$f(i)=\sum_{j=i\pm 1}g_{ij}(\lambda)f(j)+1-g_i(\lambda)$$

的最小非负解. 其中 $g_i(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}P(\int^{\sigma_1}V(X(s))\mathrm{d}s\leq t|X(0)=i)$.

证明 由引理 2.1 直接得到.

定理 2.4 $T_{ij}^{n,p}$ 由次之递推公式唯一决定

$$T_{ij}^{1,p}=\int_0^\infty t^p\mathrm{d}F_{ij}^{(1)}(t), \tag{2}$$

$$T_{ij}^{n+1,p}=\sum_{l=0}^{p}C_p^l\sum_{k=i\pm 1}G_{i,k}^{(l)}\cdot T_{kj}^{n,p-1},\quad n\geq 0,$$

其中 $G_{ij}^{(l)} = E[(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s)^l, X(\tau_1) = j|X(0) = i] = \int_0^{\infty} t^l \mathrm{d}G_{ij}(t)$.

证明 由 $F_{ij}(t) = P(\int_0^{\tau_1} V(X(s)\mathrm{d}s \le t, X(\tau_1) = j|X(0) = i)$ 立得 (2). 其次,

$$\begin{aligned}T_{ij}^{n+1,p} =&E[(\int_0^{\tau_{n+1}} V(X(s))\mathrm{d}s)^p, X(\tau_{n+1}) = j|X(0) = i]\\ =&\sum_{l=0}^{p} E[(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s)^l \cdot\\ &(\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}} V(X(s)\mathrm{d}s)^{p-1}, X(\tau_{n+1}) = j|\tau_1, X(\tau_1)]|X(0) = i]\\ =&\sum_{l=0}^{p} C_p^l \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(l)} \cdot T_{kj}^{n,p-1}.\end{aligned}$$

定理 2.5 $T_i^p = \lim_{n\to\infty} T_i^{n,p}$ 是方程

$$f(i) = \sum_{k=i\pm1} p_{ik} f(k) + \sum_{l=1}^{p} \sum^{k=i\pm1} G_{ik}^{(l)} T_k^{p-1}$$

的最小非负解，其中 $p_{ik} = P(X(\tau_1) = k|X(0) = i)$.

证明 由定理 2.4 知

$$\begin{aligned}T_i^{n+1,p} &= \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(0)} T_k^{n,p} + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(l)} T_k^{n,p-1}\\ &= \sum_{k=i\pm1} p_{ik} T_k^{n,p} + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(l)} T_k^{n,p-1}.\end{aligned}$$

另规定 $T_k^{0,l} = 0 (l > 0), T_k^{0,0} = 1$, 则

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(l)} T_k^{0,p-1} = \sum_{k=i\pm1} G_{ik}^{(p)} = T_i^{1,p}.$$

根据单调收敛定理及引理 2.2 即得结论. □

引入 $f_{ij}^{(n)}(t) \triangleq P(X(\tau_n) = j, \tau_n \le t, X(\tau_k) \ne j, 0 < k < n|X(0) = i)$, $f_{ij}^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{(n)ij}(t)$, 即 $f_{ij}^*(t)(i \ne j)$ 表示马氏骨架过程 $X(\tau_n)$ 在条件 $X(0) = i$ 下，经有限步跳跃，且在时间 t 以前到达 j 的概率，而 $f_{ij}^*(t)(i = j)$ 则表示返回 i 的条件概率.

定理 2.6

1) $q^{*n}(t, i, j) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t q^{*(n-k)}(t-s, j, j)\mathrm{d}f_{ij}^{(k)}(s)$.

2) $\lim_{j\to\infty} f_{ij}^*(t) = F_i(t)$, 当 $v(\cdot) \equiv 1$ 时.

证明 (i)

$$
\begin{aligned}
q^{*n}(t,i,j) &= P(X(\tau_n)=j,\tau_n\le t|X(0)=i)\\
&=\sum_{k=1}^{n}P(X(\tau_n)=j,\tau_n\le t,X(\tau_k)=j,X(\tau_m)\ne j,0<m<k|X(0)=i)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}E[X(\tau_n)=j,\tau_n\le t,X(\tau_k)=j,X(\tau_m)\ne j,0<m<k|\\
&\quad X(\tau_k),\tau_k,X(\tau_{k-1}),\cdots,X(0)]\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}E[X(\tau_n)=j,\tau_n-\tau_k\le t-\tau_k|X(\tau_k),\tau_k,X(\tau_{k-1}),\cdots,X(0)]\cdot\\
&\quad \mathbf{1}_{\{\tau_k\le 1,X(\tau_k)=j,X(\tau_m)\ne j,0<m<k\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega|X(0)=i)\\
&\overset{\text{积分变换}}{=\!=\!=\!=}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t q^{*(n-k)}(t-s,j,j)\mathrm{d}f_{ij}^{(k)}(s),
\end{aligned}
$$

因此 1) 成立.

(ii) 令

$$
\eta_j=\begin{cases}\inf\{\tau_n(\omega):X(\tau_n)=j\}, & \text{如右方集非空,}\\ \infty, & \text{否则,}\end{cases}
$$

则 $f_{ij}^*(t)=P(\eta_j<t|X(0)=i)$. 由文献 [3] §4.3 引理 2 得

$$
\tau(\omega)=\lim_{j\to\infty}\eta_j(\omega)\quad \text{a. e..}
$$

因此 $\lim_{j\to\infty}f_{ij}^*(t)=P(\tau<t|X(0)=i),V(\cdot)\equiv 1,\eta=\tau$, 所以

$$
\lim_{j\to\infty}f_{ij}^*(t)=P(\eta<t|X(0)=F_i(t).
$$

3 布朗生灭过程修正股票价格模型

记 $R^+=[0,+\infty)$.

设 $X=\{X(t,\omega),0\le t<\tau(\omega)\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\overline{F},P)$ 上取值于可测空间 $(R^+,\overline{F}(R^+))$ 中的随机过程, 表示某种股票的价格, τ 表示该种股票的公司经历一个系列重大事件的时刻.

又设 B_t 是定义在 $(\Omega,\overline{F},P)$ 上的标准布朗运动, μ 为股票的预期收率, $\sigma>0$ 为股票收益率方差. 股票价格的可以表示为:

$$
\frac{\mathrm{d}X}{X}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B_t.
$$

在实际股票市场上, 股价并不总是连续变化, 重大消息常引起股价跳跃性地变化. 令 $\{\tau_n\}_{n\ge 0}$ 为一系列股价跳跃变化的时刻. 显然 $\{\tau_n\}_{n\ge 0}$ 为一列关于 N_∞ 的停时, 并补充定义 $\tau_0=0$. 设 $B_t^{(n)}(n=1,2,\cdots)$ 是定义在 $(\Omega,\overline{F},P)$ 上的一列相互独立的标准布朗运动. E_0 为整数集

合，又设 $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \overline{F}, P)$ 上取值于 E_0 的马氏链，与 X 独立，其转移概率矩阵为 $(P_{ij}), i,j \in E_0$.

$$X_t = \begin{cases} X_{\tau_n} + \int_{\tau_n}^{t} \mu \mathrm{d}t + \int_{\tau_n}^{t} \sigma \mathrm{d}B_{t-\tau_n}^{(n+1)}, & \tau_n < t < \tau_{n+1}, n > 0, \\ X_{\tau_n} + \delta X_{\tau_n^-} \cdot \xi_n, & t = \tau_n, n \geq 1, X_{\tau_0} = X_0. \end{cases} \tag{3}$$

定义 3.1　由 (3) 式定义的 X_1 称为带跳的股票价格模型，其中参数 δ 称为跳跃系数.

定义 3.2　令 $Z(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\}$, 若 $\{Z_t, t \geq 0\}$ 为参数 λ 的 Poisson 过程，则由 (3) 式定义的 X_t 称为带 Poisson 跳的股票价格模型.

令 $Y(t) = \xi_n, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$.

定义 3.3　由 (3) 式定义的 X 称为带生灭跳的股票价格模型，如果 $Y(t)$ 是取值于 E_0 上的最小双边生灭 Q 矩阵.

参考文献：

[1] 侯振挺，等．马氏骨架过程 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社， 2002.
HOU Zhen-ting, et al. *Markov Skeleton Process* [M]. Chang sha: Hunan Science and Technology Press, 2002. (in Chinese)

[2] 王梓坤．生灭过程与马尔可夫链 [M]. 北京：科学出版社， 1980.
WANG Zi-kun. *Birth and Death Processes, Markov Chains* [M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese)

[3] CHUNG Kai-lai. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities* [M]. Berlin: Springer, 1969.

[4] MERTON R C. *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous* [J]. Journal of Economics, 1976, **3**: 125–144.

Brown Birth and Death Processes and Their Applications to Model of Stock Price

FENG Guang-bo[1,2], *MA Chao-qun*[1], *HOU Zhen-ting*[3], *TANG You-rong*[4]

(1. College of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China;
2. College of Economic Management, Hainan University, Haikou 570228, China;
3. Research Department, Central South University, Changsha 410075, China;
4. Department of Mathematics, University of Defence Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The paper explicitly gives the definition of a class of Brown birth and death processes, and has discusses their one dimension distribution, and the distribution and moment of integral-type functional, then obtains the calculation formula. Moreover, the paper shows the application of Brown birth and death processes to the model of stock price.

Key words: Brown birth and death process; markov skeleton process; integral type function; model of stock price.