第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0084-08 文献标识码: A

赋序列范数的矢值 Banach 序列空间 $ss(E)$ 的凸性

任丽伟， 冯国臣
(北京交通大学理学院数学系， 北京 100044)
(E-mail: lwren@science.njtu.edu.cn)

摘 要: 本文对赋序列范数的矢值 Banach 序列空间 $ss(E)$ 的一些凸性进行了讨论，得到的主要结果如下:

1. $ss(E)$ 是局部一致凸的当且仅当 ss 和 E 是局部一致凸的;
2. $ss(E)$ 是强凸的当且仅当 ss 和 E 是强凸的;
3. 设 ss 和 ss^* 具有 AK 性质，则 $ss(E)$ 是非常凸的当且仅当 ss 和 E 是非常凸的.

关键词: 矢值序列空间; 局部一致凸; 强凸; 非常凸.
MSC(2000): 46B20, 46E30
中图分类: O177.2

1 预备知识

设 Z^+ 表示自然数集， R 表示实数集， E 为 Banach 空间，以 $\omega(E)$ 表示全体矢值序列 $x=\{x_k\}$ 组成的空间，其中 $x_k \in E$, $k \in Z^+$. 并设 $\Phi(E)$ 表示全体 E 值有限序列（指有限个非零分量）所组成的空间。对于 $x=\{x_k\} \in \omega(E)$, 我们记 $x^N=\{x_1,x_2,\cdots,x_N,0,\cdots\}=\sum_{k=1}^N x_k e^k (N\in Z^+)$, 并记 $\mathrm{supp}x=\{k\in Z^+ : x_k \neq 0\}$ 以及 $x\cdot\chi_A=\sum_{k\in A} x_k e^k$ $(A\subset Z^+)$, 其中 $x_k e^k=\{0,0,...,0,x_k,0,...\}$,$x_k$ 出现在第 k 个坐标上. 此外，我们还记 $|x|=\{||x_k||_E\}$, 则 $|x|$ 为实序列. 对于两个实序列 $x=\{x_k\}$, $y=\{y_k\}$, 若 $x_k\geq y_k$,$\forall k\in Z^+$, 可记为 $x\geq y$.

函数 ρ : $\omega(E)\to[0,\infty]$ 称为序列范函数 [1], 如果满足以下条件:

(a) ρ 是范函数;

(b) 存在正实数 m 和 M, 使对 $\forall k\in Z^+$ 及 $\forall u\in E$,

$$m||u||_E \leq \inf_k \rho(ue^k) \leq \sup_k \rho(ue^k) \leq M||u||_E;$$

(c) $\rho(x)=\sup_N \rho(x^N)$.

设 $X(E)=\{x\in\omega(E):\rho(x)<\infty\}$, 称 ρ 为 $X(E)$ 上的序列范数，并称 $(X(E),\rho)$ 为赋予序列范数的矢值序列空间，特别地，若 $E=R$, 则 $(X(R),\rho)$ 为赋予序列范数的实数序列空间.

此外，范数 ρ 称为绝对单调的，若

$$x=\{x_k\},y=\{y_k\}\in X(E),||x_k||_E\leq||y_k||_E,\ \ \forall k\in Z^+,$$

则

$$\rho(x)\leq\rho(y);$$

收稿日期: 2002-05-20

$X(E)$ 称为结实的，若

$$x=\{x_k\}\in X(E), y=\{y_k\}\in\omega(E), ||y_k||_E\le||x_k||_E,\ \ \forall k\in Z^+,$$

则

$$y\in X(E).$$

$X(E)$ 称为严格单调的，若

$$x=\{x_k\}, y=\{y_k\}\in X(E), ||x_k||_E\ge||y_k||_E,\ \ \forall k\in Z^+(|x|\ge|y|),$$

且对于某个 $j, ||x_j||_E>||y_j||_E$(即 $|x|\neq|y|$), 则

$$\rho(x)>\rho(y).$$

$X(E)$ 称为具有 AK 性质，若对任意

$$x=\{x_k\}\in X(E), x^N\to x \text{ 于 } X(E);$$

$X(E)$ 称为 BK 空间，若 $X(E)$ 是 Banach 空间，且对于每个坐标映射 $p_k: X(E)\to E$ 是连续的，这里 $p_k(x)=x_k$，$x=\{x_k\}\in X(E)$.

下面恒设 $ss\supset\Phi$ 为赋绝对单调的序列范数的结实的实数序列空间，其中 Φ 为全体有限序列组成的线性空间， $ss(E)$ 表示全体使得 $|x|=\{||x_k||_E\}\in ss$ 的 E 值序列 $x=\{x_k\}$ 所成的线性空间，即

$$ss(E)=\{x\in\omega(E); |x|=\{||x_k||_E\}_{k\ge1}\in ss\}.$$

在 $ss(E)$ 中可赋予范数 $||x||_{ss(E)}=|||x|||_{ss}$. 从范数的定义可知， $ss(E)$ 为赋序列范数的矢值序列空间 [2].

下面定义 ss 的 Köthe 对偶为

$$ss^\alpha=\left\{y=\{y_k\}:\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|<+\infty,\ \forall x=\{x_k\}\in ss\right\},$$

在 ss^α 上赋予范数 $||y||=\sup\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|:||x||\le1\}$.

从定义易知， ss^α 是赋绝对单调序列范数的结实的实序列空间 [2].

定义 $ss(E)$ 的 Köthe 对偶为

$$ss(E)^\alpha=\{f=\{f_k\}:f_k\in E^*,\ \ \forall k\in Z^+,\ \ |f|=\{||f_k||_{E*}\}\in ss^\alpha\}.$$

在 $ss(E)^\alpha$ 中赋予范数 $||f||=|||f|||_{ss^\alpha}$.

$ss(E)^\alpha$ 为赋予序列范数的矢值序列空间 [2].

由于赋序列范数的矢值序列空间都是 BK 空间 [2], 则可知 $ss, ss^\alpha, ss(E), ss(E)^\alpha$ 均为 BK 空间.

$ss(E)$ 空间自 1989 年提出以来 [2], 人们对它的几何性质进行了若干研究 [3–6], 如严格凸、自反性、光滑点、一致 λ 性质等. 其中刘郁强讨论了 $ss(E)$ 的局部一致凸 [3], 证明了："若 ss 具有 AK 性质且其范数是严格单调的，则 $ss(E)$ 是局部一致凸的当且仅当 ss 和 E 都是局部一

致凸的". 本文以完全不同的方法对 $ss(E)$ 的局部一致凸进行了讨论 (见定理 1), 改进了刘郁强的工作. 此外, 本文又对 $ss(E)$ 的强凸和非常凸进行了讨论. 文中以 $B(X)$ 表示 Banach 空间 X 的单位球面, X^* 表示 X 的共轭空间, 并记 $\Sigma(x)=\{f\in X^*: \|f\|=1, \langle x,f\rangle=1\}$. 下面的一些引理可参见 [3].

引理 1 在等距同构的意义下, ss 和 E 是 $ss(E)$ 的闭线性子空间.

引理 2 若 ss 具有 AK 性质, 则

(i) $ss* = ss^\alpha$, 这里对于 $y=\{y_k\}\in ss^\alpha$, 定义 $\langle x,\ y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_ky_k, x=\{x_k\}\in ss$;

(ii) $ss(E_k)^*=ss(E)^\alpha$, 这里对于 $f=\{f_k\}\in ss(E)^\alpha$, 定义

$$\langle x,f\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,f_k\rangle, x=\{x_k\}\in ss(E).$$

引理 3 设 ss 具有 AK 性质, $x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}$、$x=\{x_k\}\in ss(E), n=1,2,\cdots$, 则 $x^{(n)}\to x$ 于 $ss(E)$ 当且仅当 $x_k^{(n)}\to x_k$ 于 $E, \forall k\in Z^+$ 和 $|x^{(n)}|\to|x|$ 于 ss.

引理 4 设 ss 和 ss^* 具有 AK 性质, $x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}, x=\{x_k\}\in \mathrm{ss}(E), n=1,2,\cdots$, 则 $x^{(n)}\xrightarrow{w}x$ 于 $ss(E)$ 当且仅当 $x_k^{(n)}\xrightarrow{w}x_k$ 于 $E,\forall k\in Z^+$ 和 $\sup_n\|x^{(n)}\|<+\infty$ ("$\xrightarrow{w}$" 表示弱收敛).

特别地, 若 ss 和 ss^* 具有 AK 性质, $a^{(n)}=\{a_k^{(n)}\}, a=\{a_k\}\in ss, n=1,2,\cdots$, 则 $a^{(n)}\xrightarrow{w}a$ 于 ss 当且仅当 $a_k^{(n)}\to a_k, \forall k\in \mathrm{Z}^+$ 和 $\sup_n\|a^{(n)}\|<+\infty$.

2 $ss(E)$ 的局部一致凸

定义 1 Banach 空间 X 称为局部一致凸的, 若对于任意 $x\in S(X), x^{(n)}\in X, \|x^{(n)}\|\to 1$ 且 $\|x^{(n)}+x\|\to 2$, 则有 $x^{(n)}\to x$ 于 X.

引理 5[6] 若 ss 是局部一致凸的, 则 ss 具有 AK 性质.

定理 1 $ss(E)$ 是局部一致凸的当且仅当 ss 和 E 是局部一致凸的.

证明 若 $ss(E)$ 是局部一致凸的, 则其闭子空间 ss 和 E 也是局部一致凸的 (从定义易知).

反之, 若 ss 和 E 是局部一致凸的, 设 $x, x^{(n)}\in ss(E)$, $\|x\|=1$, $x^{(n)}\to 1$ 且 $\|x^{(n)}+x\|\to 2$, 我们证明 $x^{(n)}\to x$ 于 $ss(E)$. 由于

$$\begin{aligned}2=\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}+x\|&=\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}+x|\right\|_{ss}\le\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}|+|x|\right\|_{ss}\\&\le\lim_{n\to\infty}(\||x^{(n)}|\|_{ss}+\||x|\|_{ss})=\lim_{n\to\infty}(\|x^{(n)}\|+\|x\|)=2,\end{aligned}$$

于是, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}|+|x|\right\|_{ss}=2.$$

由于 $\||x|\|_{ss}=\|x\|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\||x^{(n)}|\|_{ss}=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^{(n)}\|=1$ 及 ss 是局部一致凸的, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}|-|x|\right\|_{ss}=0, \tag{1}$$

由于 ss 是 BK 空间, 则有

$$\|x_k^{(n)}\|_E\to\|x_k\|_E, \tag{2}$$

又由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}+x|+2|x|\right\|_{ss} &\le \lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}+x|\right\|_{ss}+2\||x|\|_{ss}\\ &=\lim_{n\to\infty}||x^{(n)}+x||+2||x||=4\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}+x|+2|x|\right\|_{ss} \ge \lim_{n\to\infty}||x^{(n)}+3x|| &= \lim_{n\to\infty}||5(x^{(n)}+x)-2x-4x^{(n)}||\\ &\ge \lim_{n\to\infty}5||x^{(n)}+x||-2||x||-4\lim_{n\to\infty}||x^{(n)}||=4,\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\left\||x^{(n)}+x|+2|x|\right\|_{ss}=4,\quad \lim_{n\to\infty}\left\||\frac{x^{(n)}+x}{2}|+|x|\right\|_{ss}=2.$$

由于 $\left\||\frac{x^{(n)}+x}{2}|\right\|_{ss}=\frac{1}{2}||x^{(n)}+x||\to 1$ 以及 ss 是局部一致凸的, 便有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2}|x^{(n)}+x|-|x|\right\|_{ss}=0,$$

再由 ss 是 BK 空间, 则有

$$||x_k^{(n)}+x_k||_E\to 2||x_k||_E,$$

对于 $k\in \mathrm{supp}x=\{i:x_i\neq 0\}$, 有

$$\left\|\frac{x_k^{(n)}}{||x_k||_E}+\frac{x_k}{||x_k||_E}\right\|_E\to 2,$$

由 (2) 式, $\left\|\frac{x_k^{(n)}}{||x_k||_E}\right\|_E\to 1$. 由于 E 是局部一致凸的, 则有

$$\frac{x_k^{(n)}}{||x_k||_E}\to\frac{x_k}{||x_k||_E} \text{ 于 } E, \text{ 即 } x_k^{(n)}\to x_k \text{ 于 } E.$$

对于 $k\notin \mathrm{supp}x$, 由 (2) 式, $||x_k^{(n)}-x_k||_E=||x_k^{(n)}||_E\to 0$. 这样, 对于任意的 $k\in Z^+$, 均有 $x_k^{(n)}\to x_k$ 于 E. 结合 (1) 式和引理 3, 便有 $x^{(n)}\to x$ 于 ss(E). □

3 $ss(E)$ 的强凸

定义 2[7] Banach 空间 X 是强凸的, 若对于任意 $x,x^{(n)}\in S(X)$, 对于某个 $f\in\Sigma(x)$ 满足 $\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$, 则有 $x^{(n)}\to x$ 于 X.

定义 3 Banach 空间 X 具有 (H) 性质, 如果对于任意 $x,x^{(n)}\in S(X)$, $x^{(n)}\xrightarrow{w}x$ 于 X, 则 $x^{(n)}\to x$ 于 X.

定义 4 称 Banach 空间 X 具有 (G) 性质, 如果对于任意 $x\in S(X),\forall\varepsilon>0,x\notin\overline{co}M(x,\varepsilon)$, 这里 $M(x,\varepsilon)=\{y\in X;||y||\le 1,\ ||y-x||\ge\varepsilon\}$.

定义 5 Banach 空间 X 称为严格凸的, 若对任意 $x\in S(X)$,$x=\frac{y+z}{2}$,$y,z\in S(X)$ 则有 $x=y=z$.

强凸与其它一些几何性质有如下的关系:

局部一致凸 $\overset{[7]}{\Rightarrow}$ 强凸 $\overset{[7]}{\Rightarrow}$ (G) 性质 $\overset{[8]}{\Rightarrow}$ (H) 性质 + 严格凸.

引理 6 若 ss 是强凸的, 则 ss 具有 AK 性质.

证明 由于 ss 的强凸蕴涵着 ss 具有 (H) 性质, (H) 性质又蕴涵着序连续 (见 [9],p.28), 而 ss 的序连续又蕴涵着 ss 有 AK 性质 (见 [6],p.79), 所以本引理得证.

引理 7 若 ss 是强凸的, 则 ss 是严格单调的.

证明 由于 ss 的强凸蕴涵着 ss 是严格凸的, 而严格凸又蕴涵着严格单调(见 [10],p.175), 所以本引理得证.

定理 2 $ss(E)$ 是强凸的当且仅当 ss 和 E 也是强凸的.

证明 $ss(E)$ 是强凸的, 则其闭子空间 ss 和 E 也是强凸的 (从定义易知), 所以必要性成立.

充分性. 假设 ss 和 E 是强凸的, 由于 ss 强凸蕴涵着 ss 具有 AK 性质, 则有 $ss(E)^*=ss(E)^\alpha$, 下面设 $x=\{x_k\}$, $x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}\in ss(E),||x||=||x^{(n)}||=1$, 且对某个 $f=\{f_k\}\in\Sigma(x)$, 满足 $\langle x_n,f\rangle\to 1$. 则由下面的式子

$$\begin{aligned}1=\langle x,f\rangle&=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,\ f_k\rangle\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}||x_k||_E||f_k||_{E^*}=\langle|x|,|f|\rangle=\left\langle|x|\chi\mathrm{supp}_f,\ |f|\chi\mathrm{supp}_f\right\rangle\\&\le\left\||x|\chi\mathrm{supp}_f\right\|_{ss}\cdot\left\||f|\chi\mathrm{supp}_f\right\|_{ss^\alpha}\\&\le\left\||x|\chi\mathrm{supp}_f\right\|_{ss}\le||x||=1\end{aligned}\tag{3}$$

得到 $\langle|x|,\ |f|\rangle=1$. 又 $\||f|\|_{ss^\alpha}=||f||=1$, 所以 $|f|\in\Sigma(|x|)$. 另外,

$$\begin{aligned}\left\langle x^{(n)},\ f\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle x_k^{(n)},\ f_k\right\rangle&\le\sum_{k=1}^{\infty}||x_k^{(n)}||_E\cdot||f_k||_{E^*}\\&=\left\langle|x^{(n)}|,\ |f|\right\rangle\le||x^{(n)}||\cdot||f||=1\end{aligned}\tag{4}$$

及 $\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$, 则有 $\langle|x^{(n)}|,|f|\rangle\to 1$. 由于 ss 是强凸的, 则有

$$\left\||x^{(n)}|-|x|\right\|_{ss}\to 0,\tag{5}$$

从而

$$||x_k^{(n)}||_E\to||x_k||_E,\quad\forall k\in Z^+.\tag{6}$$

在 (3) 式中, 还可得到

$$\left\||x|\chi\mathrm{supp}_f\right\|_E=\left\||x|\right\|_{ss}=1.$$

对于 $k\notin\mathrm{supp}f$, 即 $f_k=0$, 一定有 $x_k=0$. 否则, 若存在 $k_0\in Z^+$, 使 $f_{k_0}=0$ 及 $x_{k_0}\neq 0$, 由 ss 的严格单调性得 $\||x|\|_{ss}>\left\||x|\chi\mathrm{supp}_f\right\|_{ss}$, 这与 (7) 式矛盾. 于是便得到了

$$\mathrm{supp}x\subset\mathrm{supp}f.\tag{8}$$

再由 (3) 式，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x_k,\ f_k\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}.$$

由于 $\langle x_k,\ f_k\rangle\le\|x_k\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}$, 所以有

$$\langle x_k,\ f_k\rangle=\|x_k\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}\quad\forall k\in Z^+.$$

利用 (8) 式，对于 $k\in\text{supp}x$, 有

$$\left\langle\frac{x_k}{\|x_k\|_E},\quad\frac{f_k}{\|f_k\|_{E^*}}\right\rangle=1.$$

这样，$\frac{f_k}{\|f_k\|_{E^*}}\in\Sigma(\frac{x_k}{\|x_k\|_E})$, 再一次利用 (4) 式，还得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|x_k^{(n)}\|_E\cdot\|f_k\|_{E*}-\left\langle x_k^{(n)},\ f_k\right\rangle\right)=0,\quad\forall k\in Z^+.$$

由于 $\|x_k^{(n)}\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}\ \ge\ \left\langle x_k^{(n)},\ f_k\right\rangle,\forall k\in Z^+$, 所以，对 $\forall k\in Z^+$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x_k^{(n)}\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}-\left\langle x_k^{(n)},\ f_k\right\rangle\right)=0.$$

由（ 6 ）式，$\lim_{n\to\infty}\left\langle x_k^{(n)},\ f_k\right\rangle=\|x_k^{(n)}\|_E\cdot\|f_k\|_{E^*}$, 再由 (8) 式，对 $k\in\text{supp}x\subset\text{supp}f$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\frac{x_k^{(n)}}{\|x_k\|_E},\quad\frac{f_k}{\|f_k\|_{E^*}}\right\rangle=1.$$

从而由 (6) 式也有

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle\frac{x_k^{(n)}}{\|x_k^{(n)}\|_E},\quad\frac{f_k}{\|f_k\|_{E^*}}\right\rangle=1.$$

由于 $\frac{x_k^{(n)}}{\|x_k^{(n)}\|_E}\in S(E),\frac{f_k}{\|f_k\|_{E^*}}\in\Sigma(\frac{x_k}{\|x_k\|_E})$ 以及 E 是强凸的，便有

$$\frac{x_k^{(n)}}{\|x_k^{(n)}\|_E}\to\frac{x_k}{\|x_k\|_E}\ \text{于}\ E.$$

再一次由 (6) 式，则有 $x_k^{(n)}\to x_k$ 于 E, 对 $k\notin\text{supp}x$, 由 (6) 式，$\|x_k^{(n)}\|\to 0$, 仍得到 $x_k^{(n)}\to x_k$. 这样，对 $\forall k\in Z^+$, 有 $x_k^{(n)}\to x_k$, 结合 (5) 式，利用引理 3, 便证得 $x^{(n)}\to x$ 于 $ss(E)$. □

4 $ss(E)$ 的非常凸

定义 6[11] Banach 空间 X 称为非常凸的，如果对于任意 $x,\ x^{(n)}\in S(X)$, 对某个 $f\in\Sigma(x)$, 满足 $\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$, 则有 $x^{(n)}\xrightarrow{w}x$ 于 X.

非常凸与其它凸性有如下的关系：

局部一致凸 ⇒ 强凸 ⇒ 非常凸 ⇒ 严格凸.

定理 3 设 ss 和 ss^* 具有 AK 性质, 则 $ss(E)$ 是非常凸的当且仅当 ss 和 E 是非常凸的.

证明 若 $ss(E)$ 是非常凸的, 则其闭子空间 ss 和 E 也是非常凸的 (从定义易知).

反之, 若 ss 和 E 是非常凸的. 设 $x=\{x_k\},x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}\in S(ss(E))$, 且对于某个 $f=\{f_k\}\in\Sigma(x)$,$\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$. 我们证明 $x^{(n)}\xrightarrow{w}x$ 于 $ss(E)$.

首先, 由 $\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$, 仿定理 2 中 (4) 式的证明, 可以得到 $\langle |x^{(n)}|,f\rangle\to 1$. 再由 $\langle x,f\rangle=1$, 仿定理 2 中 (3) 式的证明可得到 $\langle |x|,|f|\rangle=1$. 由 ss 是非常凸的, 则有 $|x^{(n)}|\xrightarrow{w}|x|$ 于 ss. 由引理 4, 则有

$$||x_k^{(n)}||_E\to ||x_k||_E,\qquad \forall k\in Z^+. \tag{9}$$

再由 $\langle x^{(n)},f\rangle\to 1$, 仍仿定理 2 中 (4) 式以及相应部分的证明有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left\langle x_k^{(n)},f_k\right\rangle-||x_k^{(n)}||_E||f_k||_{E^*}\right)=0.$$

由 (9) 式, 便有

$$\left\langle x_k^{(n)},f_k\right\rangle\ \to\ ||x_k||_E||f_k||_{E^*}. \tag{10}$$

再一次仿定理 2 中 (3) 式的证明, 得到 $\left\||x|\chi_{\mathrm{supp}f}\right\|_{ss}=\||x|\|_{ss}=1$. 由于 ss 的非常凸蕴涵着严格凸, 严格凸又蕴涵着严格单调, 则对于 $x\notin \mathrm{supp}f$, 即 $f_k=0$, 则一定有 $x_k=0$, 即 $k\notin\mathrm{supp}x$. 从而得到

$$\mathrm{supp}x\subset\mathrm{supp}f.$$

这样, 对于 $k\in\mathrm{supp}x$, 由 (10) 式得到

$$\left\langle\frac{x_k^{(n)}}{||x_k||_E},\frac{f_k}{||f_k||_{E^*}}\right\rangle\to 1,$$

再由 (9) 式, $\left\langle\frac{x_k^{(n)}}{||x_k^{(n)}||_E},\frac{f_k}{||f_k||_{E^*}}\right\rangle\to 1$.

仍仿定理 2 中 (3) 式的证明过程, 还可得到

$$\langle x_k,f_k\rangle\ =\ ||x_k||_E||f_k||_{E^*}.$$

对于 $k\in\mathrm{supp}x\subset\mathrm{supp}f$, 有 $\left\langle\frac{x_k}{||x_k||_E},\frac{f_k}{||f_k||_{E^*}}\right\rangle=1$. 这时, $\frac{f_k}{||f_k||_{E^*}}\in\Sigma(\frac{x_k}{||x_k||_E})$. 利用 E 的非常凸性, 可得到

$$\frac{x_k^{(n)}}{||x_k^{(n)}||_E}\ \xrightarrow{w}\ \frac{x_k}{||x_k||_E}\text{ 于 }E.$$

再由 (9) 式, 有 $x_k^{(n)}\xrightarrow{w}x_k$ 于 E. 对于 $k\notin\mathrm{supp}x$, 由 (9) 式, $||x_k^{(n)}||_E\to 0$, 仍有 $x_k^{(n)}\xrightarrow{w}0=x_k$ 于 E. 这样, 证得对 $\forall k\in Z^+$,$x_k^{(n)}\xrightarrow{w}x_k$ 于 E. 又由于 $\sup_n||x^{(n)}||=1<\infty$ 及 ss 和 ss^* 有 AK 性质, 利用引理 4, 便有 $x^{(n)}\xrightarrow{w}x$ 于 $ss(E)$. □

注: 本文的三个结果均可推广到 Cesaro 矢值序列空间 $ces_p(E)$ 以及 Banach 序列空间 $l_p(E)$ 中去.

参考文献:

[1] LOVAGLIA A R. *Locally uniformly convex Banach spaces* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**: 225–238.

[2] LIU Yu-qiang. *Banach sequence spaces equipped with sequential norms* [J]. SEA. Bull. Math., 1989, **1**(13): 53–61.

[3] 刘郁强，吴博儿，李秉彝. 序列空间方法 [M]. 广州：广东科技出版社， 1996.
LIU Yu-qiang, WU Bo-er, LI Bing-yi. *Methods in Sequence Spaces* [M]. Guangzhou: Guangdong Science and Technology Publishing, 1996.

[4] 任丽伟，崔云安. 矢值序列空间 ss(E) 的光滑点 [J]. 哈尔滨师范大学学报 (自然科学版), 1997, **13**(5): 16–19.
REN Liwei, CUI Yunan. *Smooth points of vector-valued sequence spaces ss(E)* [J]. J. Natural Science of Harbin Normal University, 1997, **13**(5): 16–19.

[5] 冯国臣，任丽伟. 矢值序列空间 ss(E) 的端点和一致 λ- 性质 [J]. 北方交通大学学报， 1999, **23**(2): 79–83.
FENG Guo-chen, REN Li-wei. *Extreme points and uniform λ-property of vector-valued sequence spaces ss(E)* [J]. J. Northern Jiaotong University, 1999, **23**(2): 79–83.

[6] 任丽伟，冯国臣. 矢值序列空间 ss(E) 的正规结构和中点局部一致凸 [J]. 北方交通大学学报， 2001, **25**(6): 77–80.
REN Li-wei, FENG Guo-chen. *Normal Structure and midpoints local uniform convexity of vector-valued sequence spaces ss(E)* [J]. J. Northern Jiaotong University, 2001, **25**(6): 77–80.

[7] WU Cong-xin, LI Yong-jin. *Strong convexity in Banach spaces* [J]. J. Math (Wuhan)., 1993, **13**: 105–108.

[8] KAMINSKA A, TURETT B. *Rotundity in Köthe spaces of vector-valued functions* [J]. Canad. J. Math., 1989, **41**: 659–675.

[9] LINDENSTRAUS J, TZAFRIRI L. *Classical Banach Spaces II* [M]. Springer-Verlag, 1979.

[10] KURC W. *Strictly and uniformly monotone Musielak-Orlicz spaces and applications to best approximation* [J]. J. Approx. Theory, 1992, **69**: 173–187.

[11] Tegusi, Suyalatu, LI yong-jin. *Very convex Banach spaces* [M]. Northeast. Math. J., 1997, **13**: 1–4.

Rotundity of Vector-valued Banach Squence Spaces Equipped with Sequential Norms

REN Li-wei, FENG Guo-chen
(College of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: In this paper, some convex properties of vector-valued Banach sequence spaces equipped with sequential norms are discussed. The main results are summarized as follows:

1. $ss(E)$ is locally uniformly rotund if and only if ss and E are locally uniformly rotund;
2. $ss(E)$ is strongly rotund if and only if ss and E are strongly rotund;
3. Let ss and $ss*$ have AK property, then $ss(E)$ is very rotund if and only if ss and E are very rotund.

Key words: vector-valued sequence space; local unform rotundity; strong rotundity; very rotundity.