第25卷第1期 数学研究与评论 Vol.25, No.1
2005年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)01-0122-06 文献标识码: A

C- 正则预解算子族的遍历性

张寄洲
(上海师范大学数理信息学院, 上海 200234)
(E-mail: zhangjz@shnu.edu.cn)

摘 要: 本文研究了 C- 正则预解算子族的 Abel 遍历性和 Cesàro 遍历性. 给出了两种遍历性的相互关系及其基本性质.

关键词: 正则预解算子族; Abel 遍历; Cesàro 遍历.
MSC(2000): 47D05, 47D09
中图分类: O177

1 引言和记号

关于预解算子族 [1] 和 r- 次积分解族 [2] 的遍历性已经被许多人研究过 [2-7]. 最近 C 半群和 C- 余弦算子函数的遍历性也已被研究 [8,9]. 作为预解算子族的自然推广, C- 正则预解族的概念已由郑 [10] 引入. 本文我们研究 C- 正则预解算子族的遍历性. 所得结果包含了预解算子族, C 半群, C 余弦算子函数以及 C_0 半群, 强连续余弦算子函数的相应结果 [8,9,11].

在全文中, 设 X 是 Banach 空间, $B(X)$ 表示 X 到自身的有界线性算子全体, 若 A 是 X 中的闭稠定线性算子, 其定义域, 预解集, 核及预解式分别表示为 $\mathcal{D}(A)$, $\rho(A)$,$\mathcal{N}(A)$,$R(\lambda,A)$,$C\in B(X)$ 为单射算子, $a\in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^+)$ 且 $a(t)>0$, $\int_0^\infty a(t)\mathrm{d}t=\infty$.

定义 1.1 称 A 有 C- 正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, 如果

(a) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是 X 上的一个强连续有界线性算子族且 $R(0)=C$;

(b) $R(t)\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A)$ 且对 $x\in\mathcal{D}(A)$ 和 $t\geq 0, AR(t)x=R(t)Ax$;

(c) $R(t)x=Cx+\int_0^t a(t-s)R(s)Ax\mathrm{d}s,\quad \forall x\in\mathcal{D}(A), t\geq 0$.

此外, 如果存在常数 $M,\omega\geq 0$, 使得 $\|R(t)\|\leq Me^{\omega t}$ $(t\geq 0)$, 则称 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是指数有界的.

以下假设, $R(t), a(t)$ 是指数有界的, $\hat{a}(\lambda)$,$\hat{R}(\lambda)$ 分别表示 $a(t)$ 和 $R(t)$ 的 Laplace 变换, 由前面假设, 易知当 $\lambda\to 0^+$ 时, $\hat{a}(\lambda)\to\infty$. 又设 $a_t=\int_0^t a(s)\mathrm{d}s$ 和 $A_t=a_t^{-1}\int_0^t a(t-s)R(s)\mathrm{d}s(t\geq 0)$, $\rho_C(A)=\{\lambda\in C,\lambda-A\text{为单射的, 且}R(C)\subset R(\lambda-A)\}$ 称为 A 的 C- 预解集.

对 C- 正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, 定义算子 $\hat{A}$ 如下:

$$\begin{cases}\mathcal{D}(\hat{A})=\{x\in X;\lim_{t\to 0}a_t^{-1}(R(t)x-Cx)\text{存在且属于}R(C)\}\\ \hat{A}x=C^{-1}\lim_{t\to 0}a_t^{-1}(R(t)x-Cx),\quad \forall x\in\mathcal{D}(\hat{A})\end{cases}$$

一般情况, 对于 C- 正则预解算子族, A 可以不是唯一的 [10]. 但如果我们假设:

收稿日期: 2002-05-31
基金项目: 上海自然科学基金和曙光计划基金 (03ZR14072)

(H) $A = C^{-1}AC$,

则有下面的结论 [10]

引理 1.2 设 A 有指数有界的 C- 正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$, 且假设 (H) 成立, 则以下结论成立:

(a) $\lim_{t\to 0} a_t^{-1}\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s = Cx,\ \forall x\in X$;

(b) $\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(A)$ 且

$$R(t)x = Cx + A\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s, \quad \forall x\in X,\ t\geq 0;$$

(c) $\hat{A} = A = C^{-1}\hat{A}C$;

(d) $\forall Re\lambda > \omega,\ 1/\hat{a}(\lambda) \in \rho_C(A)$ (若$\hat{a}(\lambda)\neq 0$) 且

$$(\lambda - \lambda\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(t)x\mathrm{d}t, \quad \forall x\in X.$$

根据引理 1.2, 如果假设 (H) 成立, 那么亦称 A 生成 C- 正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$. 在下面, 总假设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个一致有界的 C- 正则预解算子族, 即 $\forall t\geq 0, \|R(t)\|\leq M$ 和 $a(t)$ 是一个正函数, 使对 $\forall T>0, \|A_T\|\leq M$.

定义 1.3 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个 C- 正则预解算子族, A 为其生成元.

(a) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致(强, 弱) *Abel*- 遍历的, 如果极限 $\lim_{\lambda\to 0}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}C \equiv P$ 依一致(强, 弱)算子拓扑存在;

(b) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致(强, 弱) Cesàro- 遍历的, 如果极限 $\lim_{\lambda\to 0} A_t \equiv P$ 依一致(强, 弱)算子拓扑存在;

(c) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致(强, 弱)遍历的, 如果极限 $\lim_{t\to\infty} R(t) \equiv P$ 依一致(强, 弱)算子拓扑存在.

由定义 1.3 中的极限确定的有界线性算子实际上是相等的, 统称为 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 的遍历极限. 为了方便, 简记一致、强、弱分别为 u,s,w, 三种遍历性依次为 A,C,E. 如 (s,C) 表示强 Cesàro- 遍历.

2 主要定理

定理 2.1 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是 C- 正则预解算子族.

(a) $(u,J)\Rightarrow(s,J)\Rightarrow(w,J)$, 这里 $J\in\{A,C,E\}$.

(b) $(i,A)\Leftrightarrow(i,C)\Leftarrow(i,E)$, 这里 $i\in\{u,s,w\}$.

定理 2.1 的证明是直接的.

定理 2.2 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族. 若 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 A- 遍历的, P 为其遍历极限, 则

(a) $P^2 = CP = PC$;

(b) $C\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{R}(P)\subseteq\mathcal{N}(A); C\mathcal{N}(P)\subseteq\overline{\mathcal{R}(A)}\subseteq\mathcal{N}(P)$;

(c) $R(t)P = PC = CP, \quad \forall t\geq 0$.

证明 (a). 对任意 $x \in X$,

$$\begin{aligned} P^2x &= \lim_{\mu\to 0}(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}C(\lim_{\lambda\to 0}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx) \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\lim_{\mu\to 0}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}C^2x \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\hat{a}(\lambda)-\hat{a}(\mu)}[\hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}C^2x-\hat{a}(\mu)(I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}C^2x] \\ &= PCx. \end{aligned}$$

因此 $P^2=PC$. 又显然 $PCx=CPx$. 故 (a) 成立.

(b) 任取 $x=x_1+x_2, \forall x_1 \in \mathcal{N}(A), x_2 \in \mathcal{R}(A)$, 则存在 $y \in \mathcal{D}(A)$, 使 $Ay=x_2$ 且

$$\begin{aligned} (I-\hat{a}(\mu)A)^{-1}Cx &= (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx_1+(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}CAy \\ &= Cx_1+\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cy-\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}Cy \\ &\to Cx_1\ (\lambda\to 0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

结合 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 A- 遍历的，我们得到 $Px=Cx_1, Px_2=0$. 因此 $Cx_1 \in \mathcal{R}(P), x_2 \in \mathcal{N}(P)$, 即 $C\mathcal{N}(P) \subseteq \mathcal{R}(P), \overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq \mathcal{N}(P)$. 另一方面，若 $x \in \mathcal{R}(P)$, 则存在 $y \in X$ 使得

$$x=Py=\lim_{\lambda\to 0}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cy.$$

由

$$A(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cy=\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cy-\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}Cy\to 0\ (\lambda\to 0),$$

及 A 的闭性，可得 $x \in \mathcal{D}(A)$ 且 $Ax=0$. 故 $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{N}(A)$. 此外，对任意 $x \in \mathcal{N}(P)$, 有

$$-\hat{a}(\lambda)A(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx=Cx-(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx\to Cx\ (\lambda\to 0),$$

故 $C\mathcal{N}(P) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$.

(c) 对 $x \in X$, 由 (b) 知 $Px \in \mathcal{N}(A)$, 即 $APx=0$. 因此，由定义 1.1(b) 和引理 1.2(b) 知, $R(t)Px=CPx$.

定理 2.3 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族，且 $\overline{\mathcal{R}(C)}=X$. 则下列命题等价:

(a) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 Abel- 遍历的.

(b) $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是弱 Abel- 遍历的.

(c) 对任意 $x \in X, \{(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx, \quad 0<\lambda<1\}$ 是弱列紧的.

(d) $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$.

证明 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$. 是显然的.

(c)⇒(d) 对 $x \in X$, 存在 $\lambda_n \to 0$ 和 $y \in X$, 使得 $y_n=(I-\hat{a}(\lambda_n)A)^{-1}Cx \xrightarrow{\omega} y$, 因此,

$$Ay_n=A(I-\hat{a}(\lambda_n)A)^{-1}Cx=\frac{1}{\hat{a}(\lambda_n)}[(I-\hat{a}(\lambda_n)A)^{-1}Cx-Cx]\to 0\ (\lambda_n\to 0).$$

因为 y_n 是有界的，由 A 的闭性知 A 是弱闭的，因此 $y \in \mathcal{D}(A)$ 且 $Ay=0$.

又因为

$$Cx - y = w - \lim_{n\to\infty}(Cx - y_n) = w - \lim_{n\to\infty}(-\hat{a}(\lambda)Ay_n).$$

故 $Cx - y \in \overline{\mathcal{R}(A)}_w$, 这里 $\overline{\mathcal{R}(A)}_w$ 表示 $\mathcal{R}(A)$ 的弱闭包. 因为 $\overline{\mathcal{R}(A)}_w = \overline{\mathcal{R}(A)}$, 所以 $Cx = y + (Cx - y) \in \mathcal{N}(A) + \overline{\mathcal{R}(A)}$. 再由 (2.1) 知 $\mathcal{N}(A) + \overline{\mathcal{R}(A)}$ 是直和，故 (a) 成立.

(d)$\Rightarrow$ (a) 因为 $R(t)$ 是有界的，且 $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho_C(A)$ $(\lambda > 0)$. 故 $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}C$ 是一致有界的。又根据 (2.1), 对 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{N}(A), x_2 \in R(A)$, 我们有 $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx \to Cx_1(\lambda \to 0)$. 因为，根据 $\mathcal{R}(C)$ 的稠密性，可知 $\mathcal{N}(A) + \overline{\mathcal{R}(A)}$ 在 X 中稠密. 故对 $x \in X, \lim_{\lambda\to 0}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx$ 存在，因此 (a) 成立.

推论 2.4 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族，若 $\mathcal{N}(A) + \overline{\mathcal{R}(A)}$ 在 X 中稠密，则 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 Abel- 遍历的.

引理 2.5 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族, 若 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 强 *Abel-* 遍历的， $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{R}(C), x \in \mathcal{N}(P)$, 则 $\{\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx,\quad 0 < \lambda < 1\}$ 是序列紧的充要条件是 $x \in \mathcal{R}(A)$.

证明 先证充分性. 若 $x \in \mathcal{R}(A)$, 则存在 $y \in \mathcal{D}(A)$ 使得 $Ay = x$. 又当 $\lambda \to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx &= \hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}CAy \\ &= -Cy + (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cy \\ &\to \qquad\qquad (\text{-Cy + Py.})\end{aligned}$$

因此，结合 $t \to \hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx$ 在 (0,1) 中的连续性即知 $\{\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx,\quad 0 < \lambda < 1\}$ 是序列紧的.

再证必要性. 因为 $\{\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx,\quad 0 < \lambda < 1\}$ 是序列紧的. 故存在数列 $\{\lambda_i\}, \lim_{i\to\infty}\lambda_i = 0$. 使得极限 $g = \lim_{i\to\infty}\hat{a}(\lambda_i)(I - \hat{a}(\lambda_i)A)^{-1}Cx$ 存在. 因此，有

$$\lim_{i\to\infty}\hat{a}(\lambda_i)(I - \hat{a}(\lambda_i)A)^{-1}(R(t) - C)Cx = (R(t) - C)g. \tag{2.2}$$

由 $\lim_{\lambda\to 0}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx = 0$ $(x \in X)$, 得到

$$\lim_{\lambda\to 0}(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}C\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s = 0.$$

以 $\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s$ 代替 x 代入等式

$$A\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx - Cx,$$

得到

$$\lim_{\lambda\to 0}A\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}C\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s = -C\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\hat{a}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}C(R(t) - C)x = -C\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

根据 (2.2) 和 (2.3), 有

$$R(t)g - Cg = -C\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s.$$

因此, $g \in \mathcal{D}(A)$ 和 $Cx = -Ag$. 又由假设, $g \in \mathcal{R}(C)$ 因此 $x \in \mathcal{R}(A)$.

定理 2.6 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族, 若 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 强 *Abel*- 遍历的, 且 $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{R}(C)$, 则 $\{\hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx,\ 0<\lambda<1\}$ 是一致有界的充要条件是 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的.

证明 *必要性*. 对 $x_0 \in \overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq \mathcal{N}(P)$(见定理 2.2), 根据引理 2.5 的充分性证明我们可知极限 $\lim_{\lambda\to\infty} \hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx$ 存在, 而由假设

$$\sup_{0<\lambda<1} \|\hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}C|_{\overline{\mathcal{R}(A)}}\| < \infty,$$

故 $\lim_{\lambda\to 0} \hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx_0$ 存在. 因此由引理 2.5 知 $x_0 \in \mathcal{R}(A)$, 故 $\mathcal{R}(A)$ 是闭的.

充分性. 对任意 $x \in \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{N}(P)$, 由引理 2.5, 有

$$\sup_{0<\lambda<1} \|\hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx\| < \infty.$$

因此, 由 Banach-Steinhause 定理即得结论.

定理 2.7 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族. 若 $X = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, 则 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致 *Abel* 遍历的.

证明 因 A 是闭算子, 故 $\mathcal{N}(A)$ 是闭子空间. 于是, 由假设知 $\mathcal{R}(A)$ 也是闭子空间. 另一方面, 由假设和定理 2.3,$\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 Abel- 遍历的. 又由定理 2.6 知存在 $M>0$, 使得

$$\|\hat{a}(\lambda)(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx\| \leq M\|x\|, \quad 0<\lambda<1,\ x \in \mathcal{R}(A). \tag{2.4}$$

对任意 $x \in X$, 由假设, 存在 $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, $x_2 \in \mathcal{R}(A)$ 使得 $x = x_1 + x_2$. 由 (2.1) 知 $P(x_1+x_2) = Cx_1$. 再由 (2.4), 有

$$\|(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx - Px\| = \|(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx_2\| \leq M|\hat{a}(\lambda)^{-1}|\|x\|, \quad 0<\lambda<1.$$

故 $R(t)$ 是一致有界的.

定理 2.8 设 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是一个由 A 生成的有界 C- 正则预解算子族, 则 $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ 是强 Abel 遍历的充要条件是对每个 $x \in X$, 存在唯一分解 $Cx = y + z$, $y \in \mathcal{N}(A)$, $z \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ 使得当 $\lambda \to 0$ 时, $(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}z \longrightarrow 0$.

证明 先证必要性. 对 $x \in X$, 令 $y = Px = \lim_{\lambda\to 0}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx$. 由定理 2.2 知 $Px \in \mathcal{N}(A)$, 因此 $(I-\hat{a}(\lambda)A)Px = Px$, 故 $Px \in \mathcal{R}(I-\hat{a}(\lambda)A))$ 和 $(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Px = Px(\lambda > 0)$. 若令 $z = Cx - y$, 则 $z \in \bigcap_{\lambda>0}\mathcal{R}(I-\hat{a}(\lambda)A)$. 根据定理 2.3 中 $(c) \Rightarrow (d)$ 的证明可知 $z = Cx - y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$. 因此

$$\begin{aligned}(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}z &= (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx - (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Px \\ &= (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx - Px \\ &\to 0\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\overline{\mathcal{R}(A)}$ 有共同的唯一零元素. 故此分解是唯一的.

再证充分性. 由 $y \in \mathcal{N}(A)$ 知 $y \in \mathcal{R}(I-\hat{a}(\lambda)A))$ 且 $(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}y = y$. 因此

$$(I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}Cx = (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}y + (I-\hat{a}(\lambda)A)^{-1}z \longrightarrow y.$$

注 在以上的定理中，如果取 $a(t)\equiv 1$ 或 t 或 $C\equiv I$(单位算子)，则我们分别获得 C- 半群和 C 余弦函数，预解算子族的相应结果 [5,8,9].

参考文献：

[1] PRATO G D, IANNELLI M. *Linear Integro-Differential Equation in Banach Space* [M]. Rend. Sem. Math. Padova, 1980, **62**: 207–219.

[2] SHAW S Y. *Ergodic theorems with rate for r-time integrated solution families operator theory* [J]. Advances and Applications, 2000, **118**: 359–371.

[3] ARENDT W, PRÜSS J. *Vector-valued Tauberian theorems and asymptotic behavier of linear Volterra equations* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1992, **23**:412–446.

[4] CHANG J C, SHAW S Y. *Rate of approximation and ergodicl limits of resolvent families* [J]. Arch. Math., 1996, **66**: 320–330.

[5] LIZAMA C. *A meam ergodic theorem for resolvent operators* [J]. Semigroup Forum, 1993, **47**: 277–230.

[6] SHAW S Y. *Mean ergodic theorems and linear functional equations* [J]. J. Funct. Anal., 1989, **87**: 428–441.

[7] SHAW S Y. *Mean ergodic theorems and approximation theorems with rates* [J]. Taiwan J. Math., 2000, **4**: 365–383.

[8] LI M, HUANG F L, CHU X L. *Ergodic theory for C-semigroup* [J]. J. Sichuan University, 1999, **36**: 1–8.

[9] 肖体俊，梁进，高建伟， C-cosine 算子函数的遍历性 [J]. 应用泛函分析学报， 1999, **1**(2): 97–107.
XIAO Ti-Jun, LIANG Jin, GAO Jian-wei. *Ergodicity for C-cosine operator functions* [J]. Acta Anal. Funct. Appl., 1999, **1**(2): 97–107.

[10] 郑权，孙应传. 预解算子族的一个推广 [J]. 数学物理学报 (增刊), 2000, **20**: 723–726.
ZHENG Quan, SUN Ying-chuan. *A generalization of resolvent families of operators* [J]. Acta Math. Sci. Ser.A Chin. Ed. (Suppl.), 2000, **20**: 723–726.

[11] GOLDSTEIN J A. *Semigroups of Linear Operators and Applications* [M]. Oxford, New York, 1985.

Ergodicity for C-regularized Resolvent Operator Families

ZHANG Ji-zhou

(Math. Sci. College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In this paper, the Abel-ergodicity and Cesàro-ergodicity for C-regularized resolvent operator families are investigated. The relationships between the two kinds of ergodic properties and their basic properties are given.

Key words: C-regularized resolvent operator family; Abel-ergodicity; Cesàro-ergodicity.