文章编号: 1000-341X(2006)03-0562-09 **文献标识码**: **A**

Toeplitz 算子代数的归纳极限

许庆祥， 张小波

(上海师范大学数学系，上海 200234)

(E-mail: qingxu@online.sh.cn)

摘 要: 设 $(G_1,E_1),(G_2,E_2)$ 为两个拟格序群，记 $\mathcal{T}^{E_1},\mathcal{T}^{E_2}$ 为相应的 Toeplitz 算子代数. 设 $\varphi:G_1\to G_2$ 为一个保单位的群同态，使得 $\varphi(E_1)\subseteq E_2$. 本文给出了上述两个 Toeplitz 算子代数间的自然同态映照成为 C^*- 代数的单同态的充要条件，刻画了 Toeplitz 算子代数的归纳极限，证明了任何自由群上的 Toeplitz 算子代数是顺从的.

关键词: Toeplitz 算子代数；归纳极限.

MSC(2000): 47B35

中图分类: O177.5

1 预备知识

1.1 C^*- 代数的归纳极限

C^*- 代数的归纳极限在算子代数 K- 群等方面有着重要的应用,关于它的定义及基本性质,可参看文献 [1] 和 [2]. 相对而言，文献 [1] 的处理方式较为简洁，但文献 [1] 只介绍了一列 C^*- 代数的归纳极限. 以一般的定向集 I 代替自然数集 $\mathbf{N}$, 我们沿用文献 [1] 的方法，将文献 [1] 的有关结果作平行的推广.

设 I 为一个定向集， $\{A_i\big| i\in I\}$ 为一族 C^*- 代数，定义

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}A_i &= \left\{(a_i)_{i\in I}\middle| a_i\in A_i,\|(a_i)_{i\in I}\|=\sup_{i\in I}\|a_i\|<+\infty\right\},\\ \mathcal{I} &= \left\{(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i\middle|\exists\, i_0\in I,\text{使得当 } i\ge i_0 \text{ 时，有 } a_i=0\right\}.\end{aligned}$$

按每个分量的代数运算，由 ([1], 性质 6.1.1) 知 $\prod_{i\in I}A_i$ 成为一个 C^*- 代数，其上的范数定义为： $\|(a_i)_{i\in I}\|=\sup_{i\in I}\|a_i\|,(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i$. 易知 $\mathcal{I}$ 为 $\prod_{i\in I}A_i$ 的 $*$- 双边理想 (不一定闭). 令 $\sum_{i\in I}A_i$ 为 $\mathcal{I}$ 在 $\prod_{i\in I}A_i$ 中的闭包 (按范数), 记 $\prod_{i\in I}A_i/\sum_{i\in I}A_i$ 为商 C^*- 代数，$\pi:\prod_{i\in I}A_i\to\prod_{i\in I}A_i/\sum_{i\in I}A_i$ 为相应的商映照.

性质 1.1 设 $a=(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i$, 则 $\|\pi(a)\|=\inf_{i\in I}\sup_{j\ge i}\|a_j\|$.

证明 因 $\mathcal{I}$ 在 $\sum_{i\in I}A_i$ 中稠密，故 $\|\pi(a)\|=\inf\{\|a-b\|\,|\,b=(b_i)_{i\in I}\in\mathcal{I}\}$.

对于任意的 $b=(b_i)_{i\in I}\in\mathcal{I}$, 由 $\mathcal{I}$ 的定义知存在 $i_0\in I$, 使得当 $j\ge i_0$ 时，有 $b_j=0$. 于是 $\|a-b\|\ge\sup_{j\ge i_0}\|a_j\|\ge\inf_{i\in I}\sup_{j\ge i}\|a_j\|$. 由 b 的任意性知： $\|\pi(a)\|\ge\inf_{i\in I}\sup_{j\ge i}\|a_j\|$. 另

收稿日期: 2004-06-28

基金项目: 国家自然科学基金 (10371051), 上海市自然科学基金 (05ZR14094) 和上海市教育委员会科研项目 (05DZ04).

一方面，对于任意的 $i\in I$, 定义 $b=(b_j)_{j\in I}\in\mathcal{I}$, 其中

$$b_j=\begin{cases}0, & 若\ j\geq i\\ a_j, & 否则\end{cases}$$

则 $\|\pi(a)\|\leq\|a-b\|=\sup_{j\geq i}\|a_j\|$. 由 i 的任意性知： $\|\pi(a)\|\leq\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i}\|a_j\|$. □

注 1.1 设 $a=(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i$, 则

(i) 对于任意的 $i_0\in I$, 因 $\sup_{j\geq i}\|a_j\|$ 关于 i 单调减少, 所以 $\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i}\|a_j\|=\inf_{i\geq i_0}\sup_{j\geq i}\|a_j\|$.

(ii) 由性质 1.1 知， $a\in\sum_{i\in I}A_i\Longleftrightarrow\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i}\|a_j\|=0$.

定义 1.1 称 $\{A_i,\Phi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 为一个 C^*- 代数定向系统, 若 I 为一个定向集，$\{A_i\big|i\in I\}$ 为一族 C^*- 代数. $\forall i,j\in I$, 当 $i\leq j$ 时, 存在 $\Phi_{ji}:A_i\to A_j$ 为 C^*- 代数同态, 满足 $\Phi_{ii}=\mathrm{id}_{A_i}(\forall i\in I)$ 及粘接条件 $\Phi_{kj}\circ\Phi_{ji}=\Phi_{ki}(\forall i\leq j\leq k)$.

定理 1.2 设 $\{A_i,\Phi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 为一个 C^*- 代数定向系统，则必存在一个 C^*- 代数 A, 满足：

(i) $\forall i\in I$, 存在 $\Phi_i:A_i\to A$ 为一个 C^*- 代数同态，使得 $\Phi_j\circ\Phi_{ji}=\Phi_i,\forall i\leq j$;

(ii) 设 B 为任一 C^*- 代数，使得对于任意的 $i\in I$, 存在 $\lambda_i:A_i\to B$ 为 C^*- 代数同态，满足 $\lambda_j\circ\Phi_{ji}=\lambda_i,\forall i\leq j$, 则存在唯一的 C^*- 代数同态 $\lambda:A\to B$, 使得 $\lambda\circ\Phi_i=\lambda_i$.

证明 (i) 因每个 C^*- 代数同态都是压缩的，故对于任意的 $i_0\in I$, 可定义 $\mu_{i_0}:A_{i_0}\to\prod_{i\in I}A_i$, $\mu(a_{i_0})=(b_i)_{i\in I}$, $a_{i_0}\in A_{i_0}$, 其中 b_i 定义如下：

$$b_i=\begin{cases}\Phi_{ii_0}(a_{i_0}), & 若\ i\geq i_0\\ 0, & 否则\end{cases}$$

易知 μ_{i_0} 为一个 C^*- 代数同态.

令 $\Phi_{i_0}=\pi\circ\mu_{i_0}:A_{i_0}\to\prod_{i\in I}A_i/\sum_{i\in I}A_i$, 则由性质 1.1 和注 1.1 的 (i) 知

$$\begin{aligned}\|\Phi_{i_0}(a_{i_0})\|&=\inf_{i\geq i_0}\sup_{j\geq i}\|\Phi_{ji_0}(a_{i_0})\|=\inf_{i\geq i_0}\sup_{j\geq i}\|\Phi_{ji}(\Phi_{ii_0}(a_{i_0}))\|\\&=\inf_{i\geq i_0}\|\Phi_{ii_0}(a_{i_0})\|.\end{aligned}\tag{1}$$

设 $i,j\in I$, $i\leq j$. 任取 $a_i\in A_i$, 则当 $r\geq j$ 时，由粘接条件知 $\Phi_{rj}\big(\Phi_{ji}(a_i)\big)=\Phi_{ri}(a_i)$. 于是 $\mu_j\big(\Phi_{ji}(a_i)\big)-\mu_i(a_i)\in\mathcal{I}$, 从而知

$$\Phi_j\circ\Phi_{ji}=\Phi_i,\forall\, i\leq j.\tag{2}$$

定义

$$A=\overline{\bigcup_{i\in I}\Phi_i(A_i)}^{\|\cdot\|}\subseteq\prod_{i\in I}A_i\Big/\sum_{i\in I}A_i.\tag{3}$$

对于任意的 $a_{i_1}\in A_{i_1},a_{i_2}\in A_{i_2},\alpha\in\mathbf{C}$, 取 $j\in I$, 使得 $j\geq i_1$ 且 $j\geq i_2$, 则

$$\Phi_{i_1}(a_{i_1})+\Phi_{i_2}(a_{i_2})=\Phi_j\Big(\Phi_{ji_1}(a_{i_1})+\Phi_{ji_2}(a_{i_2})\Big)\in\Phi_j(A_j),$$

$$\Phi_{i_1}(a_{i_1})\cdot\Phi_{i_2}(a_{i_2})=\Phi_j\Big(\Phi_{ji_1}(a_{i_1})\cdot\Phi_{ji_2}(a_{i_2})\Big)\in\Phi_j(A_j),$$

$$\Phi_{i_1}(\alpha a_{i_1})=\alpha\Phi_{i_1}(a_{i_1})\in\Phi_{i_1}(A_{i_1}),\Phi_{i_1}(a_{i_1}^*)=\big(\Phi_{i_1}(a_{i_1})\big)^*\in\Phi_{i_1}(A_{i_1}).$$

于是知 $\bigcup\limits_{i\in I}\Phi_i(A_i)$ 为一个 $*$- 代数，从而 A 为一个 C^*- 代数.

(ii) 设 B 为一 C^*- 代数， $\lambda_i : A_i \to B$ 为 C^*- 代数同态 $(i\in I)$, 使得 $\lambda_j\circ\Phi_{ji}=\lambda_i, \forall i\le j$, 则对于任意的 $i_0\in I$ 及 $a_{i_0}\in A_{i_0}$, 因 $\lambda_{i_0}(a_{i_0})=\lambda_i(\Phi_{ii_0}(a_{i_0}))(i\ge i_0)$, 知

$$\|\lambda_{i_0}(a_{i_0})\|\le\inf_{i\ge i_0}\|\Phi_{ii_0}(a_{i_0})\|=\|\Phi_{i_0}(a_{i_0})\|. \tag{4}$$

任给 $x\in\bigcup_{i\in I}\Phi_i(A_i)$, 若 $x=\Phi_{i_1}(a_{i_1})=\Phi_{i_2}(a_{i_2})$, 取 $j\ge i_1$ 且 $j\ge i_2$, 则由 (2) 式知 $x=\Phi_j\big(\Phi_{ji_1}(a_{i_1})\big)=\Phi_j\big(\Phi_{ji_2}(a_{i_2})\big)$. 由 (4) 式知 $\lambda_j\big(\Phi_{ji_1}(a_{i_1})\big)=\lambda_j\big(\Phi_{ji_2}(a_{i_2})\big)$, 即 $\lambda_{i_1}(a_{i_1})=\lambda_{i_2}(a_{i_2})$.

定义

$$\lambda:\bigcup_{i\in I}\Phi_i(A_i)\to B,\quad \lambda(\Phi_i(a_i))=\lambda_i(a_i), a_i\in A_i, \tag{5}$$

则由上面的讨论知映照 λ 定义合理且为一个压缩的 $*$- 代数同态，于是 λ 可以延拓成为从 A 到 B 的一个 C^*- 代数同态，记延拓后的映照仍然为 λ. 由 (5) 式知， $\lambda\circ\Phi_i=\lambda_i, \forall i\in I$. 因 $\bigcup_{i\in I}\Phi_i(A_i)$ 在 A 中稠密，故这样的映照 λ 是唯一的. □

注 1.2 (1) 上述 C^*- 代数 A 称为 C^*- 代数定向系统 $\{A_i,\Phi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 的归纳极限，通常记为 $\lim_{\longrightarrow}\{A_i,\Phi_{ji}\}$.

(2) 由上述定理的证明过程可知，映照 λ 为单射当且仅当对于任何的 $i\in I$, $\|\Phi_i(a_i)\|\le\|\lambda_i(a_i)\|, \forall a_i\in A_i$. 特别地,若每个 λ_i 为单射,则对于任意的 $a_i\in A_i$, $\|\Phi_i(a_i)\|\le\|a_i\|=\|\lambda_i(a_i)\|$, 于是 λ 为单射.

1.2 群的归纳极限

关于群的归纳极限，可参见文献 [1] 的第 6 章. 为了明确本文的一些数学符号的意义，在本节中我们简单地介绍一下群的归纳极限的定义. 称 $\{G_i,\varphi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 为一个群的定向系统，若 I 为一个定向集， $\{G_i\big|i\in I\}$ 为一族群. $\forall i,j\in I$, 当 $i\le j$ 时，存在 $\varphi_{ji}:G_i\to G_j$ 为保单位的群同态，满足 $\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{G_i}(\forall i\in I)$ 及粘接条件 $\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}=\varphi_{ki}(\forall i\le j\le k)$. 为简单起见，我们笼统地以 e 记所有的群的单位. 分别定义 $\prod_{i\in I}G_i=\{(a_i)_{i\in I}\,|\,a_i\in G_i,\forall i\in I\}$ 及

$$\sum_{i\in I}G_i=\left\{(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}G_i\,\middle|\,\text{存在 } i_0, \text{使得当 } i\ge i_0 \text{ 时，有 } a_i=e\right\},$$

则按点点相乘， $\prod_{i\in I}G_i$ 为一个群，而 $\sum_{i\in I}G_i$ 为 $\prod_{i\in I}G_i$ 的正规子群，记 $\pi:\prod_{i\in I}G_i\to\prod_{i\in I}G_i/\sum_{i\in I}G_i$ 为相应的商映照.

由定义知，对于 $\prod_{i\in I}G_i$ 的任意两个元 $(a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I}$,

$$\begin{aligned}\pi\big((a_i)_{i\in I}\big)=\pi\big((b_i)_{i\in I}\big)&\Longleftrightarrow\exists\, i_0\in I, \text{使得当 } i\ge i_0 \text{ 时，有} a_i=b_i\\ &\Longleftrightarrow\forall i_1\in I,\exists\, i_2\ge i_1, \text{使得当 } i\ge i_2 \text{ 时，有 } a_i=b_i.\end{aligned}\tag{6}$$

$\forall i_0\in I$, 定义 $\mu_{i_0}:G_{i_0}\to\prod_{i\in I}G_i$, $\mu_{i_0}(a_{i_0})=(b_i)_{i\in I}$, 其中

$$b_i=\begin{cases}\varphi_{ii_0}(a_{i_0}), & \text{若 } i\ge i_0\\ e, & \text{否则}\end{cases}$$

令 $\varphi_{i_0} = \pi\circ\mu_{i_0} : G_{i_0} \to \prod_{i\in I} G_i/\sum_{i\in I} G_i$. 易知对于任意的 $i,j\in I$, 当 $i\le j$ 时, 有 $\varphi_j\circ\varphi_{ji} = \varphi_i$. 于是 $G = \bigcup_{i\in I}\varphi_i(G_i)$ 为一个群，它具有如下的万有性质：

设 H 为任一群，使得对于任何 $i\in I$, 存在保单位的群同态 $\lambda_i : G_i \to H$, 满足 $\lambda_j\circ\varphi_{ji} = \lambda_i, \forall i\le j$, 则存在唯一的保单位的群同态 $\lambda : G\to H$, 满足 $\lambda\circ\varphi_i = \lambda_i, \forall i\in I$.

事实上，对于任何的 $x\in G$, 必存在 $a_{i_1}\in G_{i_1}$, 使得 $x = \varphi_{i_1}(a_{i_1})$. 若还存在另外的一个足标 $i_2\in I$ 及 $a_{i_2}\in G_{i_2}$, 使得 $x = \varphi_{i_2}(a_{i_2})$, 则可取 i 充分大，使得 $i\ge i_1, i\ge i_2$ 且 $\varphi_{ii_1}(a_{i_1}) = \varphi_{ii_2}(a_{i_2})$. 此时 $\lambda_{i_1}(a_{i_1}) = \lambda_i(\varphi_{ii_1}(a_{i_1})) = \lambda_i(\varphi_{ii_2}(a_{i_2})) = \lambda_{i_2}(a_{i_2})$. 于是映照

$$\lambda : G\to H,\ \lambda\big(\varphi_i(a_i)\big) = \lambda_i(a_i), a_i\in G_i$$

定义合理且为一个保单位的群同态. 由 λ 的定义知， $\lambda\circ\varphi_i = \lambda_i, \forall i\in I$. 上述群 G 称为群的定向系统 $\{G_i,\varphi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 的归纳极限，通常记为 $\lim_{\longrightarrow}\{G_i,\varphi_{ji}\}$.

1.3 拟格序群上的 Toeplitz 算子代数

设 G 为一个离散群， E 为 G 的一个子集，满足 $e\in E, E\cdot E\subseteq E, E\cap E^{-1} = \{e\}$, 其中 e 为 G 的单位， $E^{-1} = \{g^{-1}\,|\,g\in E\}$. 设 $x,y\in G$, 定义 $x\le y \Longleftrightarrow x^{-1}y\in E$, 则 “ $\le$ ” 为 G 上的一个偏序关系.

定义 1.3.1 称 (G,E) 为一个拟格序群, 若对于 G 中的任意有限个元素 $x_1,\dots,x_n$, 当它们有一个上界属于 E 时，它们在 E 中必有最小的上界，这个最小的上界记为 $\sigma(x_1,\dots,x_n)$. 按定义， $x_i\le\sigma(x_1,\dots,x_n)\in E, \forall i;\ \forall x\in E, x_i\le x(\forall i)\Longrightarrow \sigma(x_1,\dots,x_n)\le x$.

设 $x\in G$, 易知 x 有一个上界属于 E, 当且仅当 $x\in E\cdot E^{-1}$; 当 $x\in E\cdot E^{-1}$ 时，记 $\tau(x) = \sigma(x^{-1})$, 则 $x = \sigma(x)\tau(x)^{-1}$. 当 $x,y\in E$ 时，为简便起见，同 [3], 采用如下记号：

$$x\vee y = \begin{cases}\sigma(x,y), & \text{若 } x,y \text{ 有一个公共的上界}\\ \infty, & \text{若 } x,y \text{ 没有公共的上界}\end{cases}$$

给定一个拟格序群 (G,E), 记 $\ell^2(G)$ 为 G 上的平方可积函数全体， $\{\delta_g\,|\,g\in G\}$ 为其标准直交基， p^E 为 $\ell^2(G)$ 到由 $\{\delta_g\,|\,g\in E\}$ 所张成的闭子空间上的投影算子. $\forall g\in G$, 定义 Toeplitz 算子 $T_g^E = p^E u_g p^E$, 其中 $u_g\delta_h = \delta_{gh}, g,h\in G$. 由 $\{T_g^E\,|\,g\in G\}$ 所生成的 C^*- 代数称为 Toeplitz 算子代数，记为 $\mathcal{T}^E$. 由 [4] 知,

$$\mathcal{T}^E = \overline{\operatorname{span}\{T_g^E T_{h^{-1}}^E\,|\,g,h\in E\}}^{\|\cdot\|},$$

$$D^E = \overline{\operatorname{span}\{T_g^E T_{g^{-1}}^E\,|\,g\in E\}}^{\|\cdot\|}$$

为一交换的 C^*- 子代数，并且存在一个忠实的条件期望 $\theta^E : \mathcal{T}^E\to D^E$, 使得

$$\theta^E(T_g^E T_{h^{-1}}^E) = \begin{cases} T_g^E T_{h^{-1}}^E, & \text{若 } g = h\\ 0, & \text{若 } g\ne h\end{cases}$$

由 [4] 知，对于任意的 $x\in G$,

$$T_x^E = \begin{cases} T_{\sigma(x)}^E T_{\tau(x)^{-1}}^E, & \text{若 } x\in E\cdot E^{-1}\\ 0, & \text{若 } x\notin E\cdot E^{-1}\end{cases}$$

并且对于任何的 $x, y \in E$,

$$(T_x^E T_{x^{-1}}^E) \cdot (T_y^E T_{y^{-1}}^E) = \begin{cases} T_{x\vee y}^E T_{(x\vee y)^{-1}}^E, & 若\ x \vee y \in E \\ 0. & 若\ x \vee y = \infty \end{cases}$$

2 主要结果

定理 2.1 设 $\{G_i, \varphi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 为一个群的定向系统，记 $G = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(G_i)$ 为其归纳极限．设对于任意的 $i \in I$, 存在 $E_i \subseteq G_i$, (G_i, E_i) 为一拟格序群，使得

(i) 对于任意的 $i, j \in I$, 当 $i \le j$ 时， $\varphi_{ji}(E_i) \subseteq E_j$;

(ii) 对于 G_i 中的任意有限个元 $t_1, \dots, t_n$, 若它们有一个公共的上界属于 E_i, 则

$$\varphi_{ji}(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \sigma\big(\varphi_{ji}(t_1), \dots, \varphi_{ji}(t_n)\big), \forall j \ge i.$$

令 $E = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(E_i)$, 则 (G, E) 为一个拟格序群.

证明 (1) 任取 $i \in I$, 记 e_{G_i} 为 G_i 的单位， e_G 为 G 的单位．因 $e_{G_i} \in E_i$, 故 $e_G = \varphi_i(e_{G_i}) \in E$.

(2) 任取 $a, b \in E$, 设 $a = \varphi_{i_1}(g_{i_1}), b = \varphi_{i_2}(g_{i_2})$, 其中 $g_{i_1} \in E_{i_1}, g_{i_2} \in E_{i_2}$. 取 $i_3 \in I, i_3 \ge i_1$ 且 $i_3 \ge i_2$, 则 $ab = \varphi_{i_3}\Bigg(\varphi_{i_3 i_1}(g_{i_1})\varphi_{i_3 i_2}(g_{i_2})\Bigg) \in E$. 这样我们证明了： $E \cdot E \subseteq E$.

(3) 设 $a, a^{-1} \in E$, 可取同一个 $i_0 \in I$ 及 $x_{i_0}, y_{i_0} \in E_{i_0}$, 使得 $a = \varphi_{i_0}(x_{i_0})$, $a^{-1} = \varphi_{i_0}(y_{i_0})$. 由 (6) 式知，存在 $i_1 \ge i_0$, 使得当 $i \ge i_1$ 时，有 $\varphi_{ii_0}(y_{i_0}) = \varphi_{ii_0}(x_{i_0}^{-1}) = \big(\varphi_{ii_0}(x_{i_0})\big)^{-1}$. 由 $E_i \cap E_i^{-1} = \{e_{G_i}\}$, 知： $\varphi_{ii_0}(x_{i_0}) = e_{G_i}, \forall i \ge i_1$, 于是 $a = \pi\Bigg((e_{G_i})_{i\in I}\Bigg) = e_G$. 这样我们证明了： $E \cap E^{-1} = \{e_G\}$.

(4) 设 $x_1, \dots, x_n$ 为 G 的任意有限个元， $x \in E$ 为它们的一个公共的上界，即 $x_p^{-1}x \in E, p = 1, \dots, n$. 取 $i_1 \in I$, 使得

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_{i_1}(a_1), \dots, x_n = \varphi_{i_1}(a_n),\ a_1, \dots, a_n \in G_{i_1}, \\ &x_1^{-1}x = \varphi_{i_1}(b_1), \dots, x_n^{-1}x = \varphi_{i_1}(b_n),\ b_1, \dots, b_n \in E_{i_1}, \\ &x = \varphi_{i_1}(a),\ a \in E_{i_1}. \end{aligned}$$

因 $x_p \cdot (x_p^{-1}x) = x$, 故存在 $i_2 \ge i_1$, 使得 $\varphi_{i_2 i_1}(a_p b_p) = \varphi_{i_2 i_1}(a), p = 1, \dots, n$. 于是对于 $p = 1, \dots, n$, $\big(\varphi_{i_2 i_1}(a_p)\big)^{-1}\varphi_{i_2 i_1}(a) = \varphi_{i_2 i_1}(b_p) \in E_{i_2}$. 令

$$t_1 = \varphi_{i_2 i_1}(a_1), \dots, t_n = \varphi_{i_2 i_1}(a_n),\ s = \varphi_{i_2 i_1}(a),$$

则

$$x_1 = \varphi_{i_2}(t_1), \dots, x_n = \varphi_{i_2}(t_n),\ x = \varphi_{i_2}(s),\ t_p \le s \in E_{i_2}.$$

于是 $\sigma(t_1, \dots, t_n) \le s$, 从而 $\varphi_{i_2}\big(\sigma(t_1, \dots, t_n)\big) \le \varphi_{i_2}(s) = x$.

对于 $p = 1, \dots, n$, $x_p^{-1}\varphi_{i_2}\big(\sigma(t_1, \dots, t_n)\big) = \varphi_{i_2}\Bigg(t_p^{-1}\big(\sigma(t_1, \dots, t_n)\big)\Bigg) \in \varphi_{i_2}(E_{i_2}) \subseteq E$, 于是 $\varphi_{i_2}\big(\sigma(t_1, \dots, t_n)\big)$ 为 $x_1, \dots, x_n$ 在 E 中的一个上界.

另一方面，任给 $y\in E$, 使得 $y\geq x_p, p=1,\ldots,n$, 同前可知，存在 $i_3\in I$ 及 $l_1,\ldots,l_n\in G_{i_3}, r\in E_{i_3}$, 使得

$$x_1=\varphi_{i_3}(l_1),\ldots,x_n=\varphi_{i_3}(l_n), y=\varphi_{i_3}(r), l_1\leq r,\ldots,l_n\leq r.$$

取 $k\geq i_2$ 且 $k\geq i_3$, 使得

$$\begin{aligned}\varphi_{ki_2}(t_1)&=\varphi_{ki_3}(l_1)\leq\varphi_{ki_3}(r),\\ &\vdots\\ \varphi_{ki_2}(t_n)&=\varphi_{ki_3}(l_n)\leq\varphi_{ki_3}(r).\end{aligned}$$

于是 $\sigma\big(\varphi_{ki_2}(t_1),\ldots,\varphi_{ki_2}(t_n)\big)\leq\varphi_{ki_3}(r)$, 即 $\varphi_{ki_2}\big(\sigma(t_1,\ldots,t_n)\big)\leq\varphi_{ki_3}(r)$, 从而

$$\varphi_{i_2}\big(\sigma(t_1,\ldots,t_n)\big)=\varphi_k\big(\varphi_{ki_2}\big(\sigma(t_1,\ldots,t_n)\big)\big)\leq\varphi_k\big(\varphi_{ki_3}(r)\big)=y.$$

这样我们证明了： $\sigma(x_1,\ldots,x_n)=\varphi_{i_2}\big(\sigma(t_1,\ldots,t_n)\big)$.

由 (1)–(4) 知， (G,E) 为一个拟格序群. □

下列引理的证明见 ([3], 性质 1.3).

引理 2.2　设 (G,E) 为一个拟格序群， $\{L_x\big|x\in E\}$ 为单位 C^*- 代数 $\mathcal{B}$ 的一族可交换的投影， $L_e=1_{\mathcal{B}}$, 则下列两个条件等价：

(i) 存在一个保单位的 C^*- 代数同态 $\pi_L: D^E\to\mathcal{B}$, 使得 $\pi_L(T_x^ET_{x^{-1}}^E)=L_x, \forall x\in E$;

(ii)

$$L_xL_y=\begin{cases}L_{x\vee y}, & \text{若 } x\vee y\in E\\ 0, & \text{若 } x\vee y=\infty\end{cases}$$

当 π_L 为一个 C^*- 代数同态时， π_L 为单射当且仅当对于 E 中的任意有限个元素 $a,z_1,\ldots,z_n$, 当 $a<z_i, i=1,\ldots,n$ 时， $\prod_{i=1}^n(L_a-L_{z_i})\neq 0$.

定理 2.3　设 $(G_1,E_1),(G_2,E_2)$ 为两个拟格序群， $\varphi: G_1\to G_2$ 为一个保单位的群同态，使得 $\varphi(E_1)\subseteq E_2$. 形式地定义映照 $\gamma^{E_2,E_1}:\mathcal{T}^{E_1}\to\mathcal{T}^{E_2}$,

$$\gamma^{E_2,E_1}(T_g^{E_1}T_{h^{-1}}^{E_1})=T_{\varphi(g)}^{E_2}T_{\varphi(h)^{-1}}^{E_2},\ g,h\in E_1,$$

则 γ^{E_2,E_1} 定义合理且为一个单的 C^*- 代数同态当且仅当下列条件同时成立：

(i) 当 $x,y\in E_1$ 时， $\varphi(x)=\varphi(y)\Longrightarrow x=y$.

(ii) $\forall x,y\in E_1$, $x\vee y\in E_1\Longleftrightarrow\varphi(x)\vee\varphi(y)\in E_2$; 当 $x\vee y\in E_1$ 时， $\varphi(x\vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y)$.

(iii) $\varphi(G_1)\cap E_2=\varphi(E_1)$.

证明　*必要性*. 设映照 γ^{E_2,E_1} 定义合理且为一个单的 C^*- 代数同态，下证条件 (i)–(iii) 成立.

(1) 设 $x,y\in E_1$, 则 $\varphi(x)=\varphi(y)\Longrightarrow T_{\varphi(x)}^{E_2}=T_{\varphi(y)}^{E_2}\Longrightarrow T_x^{E_1}=T_y^{E_1}\Longrightarrow T_x^{E_1}\delta_{e_{G_1}}=T_y^{E_1}\delta_{e_{G_1}}\Longrightarrow\delta_x=\delta_y\Longrightarrow x=y$.

(2) 设 $x,y\in E_1$, $x\vee y\in E_1\Longleftrightarrow(T_x^{E_1}T_{x^{-1}}^{E_1})\cdot(T_y^{E_1}T_{y^{-1}}^{E_1})\neq 0\Longleftrightarrow(T_{\varphi(x)}^{E_2}T_{\varphi(x)^{-1}}^{E_2})\cdot(T_{\varphi(y)}^{E_2}T_{\varphi(y)^{-1}}^{E_2})\neq 0\Longleftrightarrow\varphi(x)\vee\varphi(y)\in E_2$. 当 $x\vee y\in E_1$ 时， $(T_x^{E_1}T_{x^{-1}}^{E_1})\cdot(T_y^{E_1}T_{y^{-1}}^{E_1})=$

$T^{E_1}_{x\vee y}T^{E_1}_{(x\vee y)^{-1}}$, 于是

$$\begin{aligned} T^{E_2}_{\varphi(x\vee y)}T^{E_2}_{\varphi(x\vee y)^{-1}} &= \gamma^{E_2,E_1}\left((T^{E_1}_x T^{E_1}_{x^{-1}})\cdot(T^{E_1}_y T^{E_1}_{y^{-1}})\right) \\ &= (T^{E_2}_{\varphi(x)}T^{E_2}_{\varphi(x)^{-1}})\cdot(T^{E_2}_{\varphi(y)}T^{E_2}_{\varphi(y)^{-1}}) = T^{E_2}_{\varphi(x)\vee\varphi(y)}T^{E_2}_{\left(\varphi(x)\vee\varphi(y)\right)^{-1}}. \end{aligned}$$

于是 $\varphi(x\vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y)$.

(3) 由已知条件知, $\varphi(E_1)\subseteq\varphi(G_1)\cap E_2$. 反之, 设 $x\in G_1$ 使得 $\varphi(x)\in E_2$, 则 $T^{E_2}_{\varphi(x)^{-1}}T^{E_2}_{\varphi(x)}=1$. 因 γ^{E_2,E_1} 为单射, 所以有 $T^{E_1}_{x^{-1}}T^{E_1}_x=1$; 特别地, $T^{E_1}_{x^{-1}}T^{E_1}_x\delta_{e_{G_1}}=\delta_{e_{G_1}}$, 于是 $x\in E_1$.

充分性. 设条件 (i)–(iii) 成立, 下证 γ^{E_2,E_1} 定义合理且为一个单的 C^*- 代数同态. 令 $\mathcal{A}=\overline{\operatorname{span}\{T^{E_2}_{\varphi(g)}T^{E_2}_{\varphi(h)^{-1}}\big|\,g,h\in E_1\}}^{\|\cdot\|}$, 则由条件 (ii) 知 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{T}^{E_2}$ 的 C^*- 子代数.

定义 $\rho:\operatorname{span}\{T^{E_2}_{\varphi(g)}T^{E_2}_{\varphi(h)^{-1}}\big|\,g,h\in E_1\}\to\mathcal{T}^{E_1}$,

$$\rho\left(\sum_i\lambda_i T^{E_2}_{\varphi(g_i)}T^{E_2}_{\varphi(h_i)^{-1}}\right)=\sum_i\lambda_i T^{E_1}_{g_i}T^{E_1}_{h_i^{-1}},\ \lambda_i\in\mathbf{C},g_i,h_i\in E_1. \tag{7}$$

$\forall\varepsilon>0$, 因 $\operatorname{span}\{\delta_g\big|\,g\in E_1\}$ 在 $\ell^2(E_1)$ 中稠密, 所以存在 $\xi=\sum_p\mu_p l_p$, $\mu_p\in\mathbf{C},l_p\in E_1$, $\|\xi\|^2=\sum_p|\mu_p|^2=1$, 使得

$$\left\|\sum_i\lambda_i T^{E_1}_{g_i}T^{E_1}_{h_i^{-1}}\right\|\le\left\|\left(\sum_i\lambda_i T^{E_1}_{g_i}T^{E_1}_{h_i^{-1}}\right)(\xi)\right\|+\varepsilon. \tag{8}$$

令 $\eta=\sum_p\mu_p\delta_{\varphi(l_p)}$, 则 $\|\eta\|=1$ 且由条件 (i)–(iii) 知,

$$\left\|\left(\sum_i\lambda_i T^{E_1}_{g_i}T^{E_1}_{h_i^{-1}}\right)(\xi)\right\|=\left\|\left(\sum_i\lambda_i T^{E_2}_{\varphi(g_i)}T^{E_2}_{\varphi(h_i)^{-1}}\right)(\eta)\right\|. \tag{9}$$

由 (8)–(9) 式及 ε 的任意性知

$$\left\|\sum_i\lambda_i T^{E_1}_{g_i}T^{E_1}_{h_i^{-1}}\right\|\le\left\|\sum_i\lambda_i T^{E_2}_{\varphi(g_i)}T^{E_2}_{\varphi(h_i)^{-1}}\right\|. \tag{10}$$

于是映照 ρ 定义合理且可以延拓成为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{T}^{E_1}$ 的到上的 C^*- 代数同态映照, 记延拓后的映照仍然为 ρ. 下证 ρ 为单射, 从而 $\gamma^{E_2,E_1}=l\circ\rho^{-1}$ 为一 C^*- 代数同态映照, 这里 l 为从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{T}^{E_2}$ 的嵌入映照.

记

$$D(\mathcal{A})=\mathcal{A}\cap D^{E_2}=\overline{\operatorname{span}\{T^{E_2}_{\varphi(g)}T^{E_2}_{\varphi(g)^{-1}}\,\big|\,g\in E_1\}}^{\|\cdot\|},$$

$\theta^{E_2}|_{\mathcal{A}}$ 为 θ^{E_2} 在 $\mathcal{A}$ 上的限制. 易知下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{T}^{E_1} \\ \theta^{E_2}|_{\mathcal{A}}\downarrow & & \theta^{E_1}\downarrow \\ D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\rho} & D^{E_1} \end{array}$$

$\forall x\in E_1$, 令 $L_x=T^{E_2}_{\varphi(x)}T^{E_2}_{\varphi(x)^{-1}}$, 则由引理 2.2 知，存在 C^*- 代数同构映照 $\pi_L: D^{E_1}\to D(\mathcal{A})$, 使得 $\pi_L\left(T^{E_1}_xT^{E_1}_{x^{-1}}\right)=T^{E_2}_{\varphi(x)}T^{E_2}_{\varphi(x)^{-1}}$, $x\in E_1$. 显然， $\rho|_{D(\mathcal{A})}=\pi_L^{-1}$, 于是 $\rho|_{D(\mathcal{A})}: D(\mathcal{A})\to D^{E_1}$ 为 C^*- 代数同构映照, 从而对于任何的 $T\in\mathcal{A}$, 若 $\rho(T)=0$, 则 $\rho\left(\theta^{E_2}(T^*T)\right)=\theta^{E_1}\left(\rho(T^*T)\right)=0$, 于是 $\theta^{E_2}(T^*T)=0$, 进而由 θ^{E_2} 的忠实性知 $T^*T=0$, 即 $T=0$. □

定理 2.4 设 $\{G_i,\varphi_{ji}\}_{i,j\in I}$ 为一个群的定向系统，记 $G=\bigcup_{i\in I}\varphi_i(G_i)$ 为其归纳极限. 设对于任意的 $i\in I$, 存在 $E_i\subseteq G_i$, (G_i,E_i) 为一拟格序群，使得定理 2.1 中的条件成立. 此外对于任意的 $i,j\in I$, 当 $i\le j$ 时有

(i) 当 $x,y\in E_i$ 时， $\varphi_{ji}(x)=\varphi_{ji}(y)\Longrightarrow x=y$.

(ii) $\forall x,y\in E_i$, $x\vee y\in E_i\Longleftrightarrow \varphi_{ji}(x)\vee\varphi_{ji}(y)\in E_j$; 当 $x\vee y\in E_i$ 时， $\varphi_{ji}(x\vee y)=\varphi_{ji}(x)\vee\varphi_{ji}(y)$.

(iii) $\varphi_{ji}(G_i)\cap E_j=\varphi_{ji}(E_i)$.

则 C^*- 代数定向系统 $\{\mathcal{T}^{E_i},\gamma^{E_j,E_i}\}$ 的归纳极限同构于 $\mathcal{T}^E$, 这里 $E=\bigcup_{i\in I}\varphi_i(E_i)$.

证明 $\forall i,j\in I$, 当 $i\le j$ 时，由定理 2.3 知 $\gamma^{E_j,E_i}:\mathcal{T}^{E_i}\to\mathcal{T}^{E_j}$ 为一个单的 C^*- 代数同态，满足

$$\gamma^{E_j,E_i}(T^{E_i}_gT^{E_i}_{h^{-1}})=T^{E_j}_{\varphi_{ji}(g)}T^{E_j}_{\varphi_{ji}(h)^{-1}},\forall g,h\in E_i. \tag{11}$$

由群同态的粘接条件 $\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}=\varphi_{ki}$ 知

$$\gamma^{E_k,E_j}\circ\gamma^{E_j,E_i}=\gamma^{E_k,E_i}\quad (i\le j\le k),$$

于是 $\{\mathcal{T}^{E_i},\gamma^{E_j,E_i}\}_{i,j\in I}$ 为一 C^*- 代数定向系统.

$\forall i_0\in I$, 证明存在 $\gamma^{E,E_{i_0}}:\mathcal{T}^{E_{i_0}}\to\mathcal{T}^E$ 为单的 C^*- 代数同态，满足

$$\gamma^{E,E_{i_0}}(T^{E_{i_0}}_gT^{E_{i_0}}_{h^{-1}})=T^E_{\varphi_{i_0}(g)}T^E_{\varphi_{i_0}(h)^{-1}},\ \forall g,h\in E_{i_0}. \tag{12}$$

为此，只要验证定理 2.3 的三个条件均成立即可.

(1) 设 $x,y\in E_{i_0}$, 若 $\varphi_{i_0}(x)=\varphi_{i_0}(y)$, 则存在 $k\ge i_0$, 使得 $\varphi_{ki_0}(x)=\varphi_{ki_0}(y)$, 从而由已知条件 (i) 知 $x=y$.

(2) 设 $x,y\in E_{i_0}$, 使得 $x\vee y\in E_{i_0}$, 则 $\varphi_{i_0}(x)\le\varphi_{i_0}(x\vee y)$, 且 $\varphi_{i_0}(y)\le\varphi_{i_0}(x\vee y)$, 于是 $\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)\in E$.

反过来, 若 $\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)\in E$, 则存在 $i_1\in I$ 及 $a\in E_{i_1}$, 使得 $\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)=\varphi_{i_1}(a)$. 由定理 2.1 的证明过程可知，存在 $k\in I$, $k\ge i_0, k\ge i_1$, 使得 $\varphi_{ki_0}(x)\le\varphi_{ki_1}(a)$ 且 $\varphi_{ki_0}(y)\le\varphi_{ki_1}(a)$, 于是 $\varphi_{ki_0}(x)\vee\varphi_{ki_0}(y)\le\varphi_{ki_1}(a)$, 从而有

$$\varphi_k\left(\varphi_{ki_0}(x)\vee\varphi_{ki_0}(y)\right)\le\varphi_k\left(\varphi_{ki_1}(a)\right)=\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y). \tag{13}$$

由条件 (ii) 知， $\varphi_{ki_0}(x)\vee\varphi_{ki_0}(y)=\varphi_{ki_0}(x\vee y)$, 于是由 (13) 式知 $\varphi_{i_0}(x\vee y)\le\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)$. 另一方面，显然有 $\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)\le\varphi_{i_0}(x\vee y)$, 于是 $\varphi_{i_0}(x)\vee\varphi_{i_0}(y)=\varphi_{i_0}(x\vee y)$.

(3) 设 $x\in G_{i_0}$, 使得 $\varphi_{i_0}(x)\in E$, 则存在 $i_1\in I$ 及 $y\in E_{i_1}$, 使得 $\varphi_{i_0}(x)=\varphi_{i_1}(y)$. 于是存在 $k\ge i_0,k\ge i_1$, 使得 $\varphi_{ki_0}(x)=\varphi_{ki_1}(y)\in E_k$, 从而 $x\in E_{i_0}$.

由 (11)–(12) 式知，对于任意的 $i,j\in I$, 当 $i\leq j$ 时，有 $\gamma^{E,E_j}\circ\gamma^{E_j,E_i}=\gamma^{E,E_i}$. 因每个 γ^{E,E_i} 都为单射，由注 1.2 知 $\{\mathcal{T}^{E_i},\gamma^{E_j,E_i}\}_{i,j\in I}$ 的归纳极限同构于 $\mathcal{T}^E$. □

注 2.1 (1) 设 Z 为整数群，Z_+ 为非负整数全体, 对于任给的自然数 n, 令 $G_n=Z^n, E_n=Z_+^n$. 当 $n\leq m$ 时，令 $\varphi_{mn}:G_n\to G_m, \varphi_{mn}(z_1,\dots,z_n)=(z_1,\dots,z_n,0,\dots,0)$. 易知对于这样的群的定向系统，定理 2.4 中的条件满足.

(2) 设 $\{a_\alpha\,|\,\alpha\in\wedge\}$ 为一非空集合. $\forall i\subseteq\wedge$, 令 G_i 为由 $\{a_\alpha\,|\,\alpha\in i\}$ 所生成的自由群， E_i 为由 $\{a_\alpha\,|\,\alpha\in i\}$ 所生成的半群. 对于 $\wedge$ 的两个非空子集 i,j, 定义 $i\leq j\Longleftrightarrow i\subseteq j$. 当 $i\subseteq j$ 时，定义 $\varphi_{ji}:G_i\to G_j$ 为嵌入映照. 易知对于这样的群的定向系统，定理 2.4 中的条件也满足. 由文献 [4] 的第五节知, 对于 $\wedge$ 的任何有限子集 i, Toeplitz 算子代数 $\mathcal{T}^{E_i}$ 是顺从的 (关于顺从的定义，详见文献 [4] 的第四节), 即 $\mathcal{T}^{E_i}$ 对 G_i 的等距表示具有万有性质. 由定理 2.4 易知，下述更为一般的结论也成立：

推论 2.5 设 $\{a_\alpha\,|\,\alpha\in\wedge\}$ 为一非空集合， G,E 分别为由 $\{a_\alpha\,|\,\alpha\in\wedge\}$ 所生成的自由群和自由半群，则相应于拟格序群 (G,E), Toeplitz 算子代数 $\mathcal{T}^E$ 是顺从的.

参考文献：

[1] RØRDAM M, LARSEN F, LAUSTEN N. *An introduction to K-theory for C^*-algebras* [M]. Cambridge University Press, 2000.

[2] WEGGE-OLSEN N. *K-Theory and C^*-Algebras: A Friendly Approach* [M]. Oxford University Press, 1993.

[3] LACA M, RAEBURN I. *Semigroup crossed products and Toeplitz algebras of nonabelian groups* [J]. J. Funct. Anal., 1996, **139**: 415–440.

[4] NICA A. *C^*-algebras generated by isometries and Wiener-Hopf operators* [J]. J. Opertaor Theory, 1992, **27**: 17–52.

Inductive Limits of Toeplitz Algebras

XU Qing-xiang, ZHANG Xiao-bo

(Dept. of Math., Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let (G_1,E_1), (G_2,E_2) be two quasi-lattice ordered groups, and $\mathcal{T}^{E_1}$, $\mathcal{T}^{E_2}$ be the associated Toeplitz algebras. Let $\varphi:G_1\to G_2$ be a unital group homomorphism such that $\varphi(E_1)\subseteq E_2$. This paper gives a necessary and sufficient condition under which the natural morphism from $\mathcal{T}^{E_1}$ to $\mathcal{T}^{E_2}$ becomes an injective C^*-algebra morphism. As an application, inductive limits of Toeplitz algebras are clarified. In particular, we show that Toeplitz algebras over free groups are always amenable.

Key words: Toeplitz algebra; inductive limit.