第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0617-06 **文献标识码**: **A**

凸体的 p 次径向平均体的几个性质

袁淑峰 [1,2], 张海娟 [2], 袁 俊 [3]
(1. 绍兴文理学院上虞分院，浙江 上虞 312300; 2. 上海大学应用数学和力学研究所，上海 200444;
3. 上海大学数学系，上海 200444)
(E-mail: yuanshufeng2003@163.com)

摘 要: 本文证明了凸体的 p 次径向平均体的线性不变性和椭球的 p 次径向平均体仍是椭球，并且获得了 p 次径向平均体相应于 Blaschke-Santaló 不等式的一个反向不等式.

关键词: p 次径向平均体；凸体；径向函数.
MSC(2000): 52A40
中图分类: O186.5

1 引言和预备知识

凸体 K 的 p 次径向平均体 $R_pK(p>-1)$ 是凸体几何中的一个新概念，由 R.J Gardner 和张高勇于 1998 年提出 [4]. 它与另一个由直线和凸体 K 的交来定义的星体 S_pK 关系紧密：

$$R_pK=((p+1)V(K))^{-\frac{1}{p}}S_pK,$$

并把凸体几何中的两大重要概念：差分体 DK 和投影体的极体 Π^*K 联系起来，给出了两者之间的谱系：

$$\Pi^*K=S_{-1}K\subseteq S_pK\subseteq S_qK\subseteq S_\infty K=DK,-1\le p\le q.$$

由于 $R_\infty K=DK$, 所以 p 次径向平均体的概念可看作是对中心化或径向对称化的推广, 对 $p>0$, 凸体的 p 次径向平均体是凸体.

本文除了在第一节对所需的预备知识和记号作简要介绍外, 将在第二节建立凸体 K 的 p 次径向平均体 R_pK 的线性不变性, 这是对文 [4] 中 R_pK 对保体积的线性变换的结论的一个推广, 并且证明了椭球的 p 次径向平均体仍是椭球和另一个有趣的性质：$R_pR_qE=R_qR_pE$, 其中 E 为椭球， $p,q>-1$, 且 $pq\neq 0$. 凸体与其极体的体积乘积的上界问题就是著名的 Blaschke-Santaló 不等式. 与之对应，我们将在第三节建立有关推广后的 p 次径向平均体的一个反向不等式 (见定理 3.3). 关于凸体几何的进一步讨论可参看文献 [3],[7].

我们将欧几里得空间 E^n 中的原点、单位球面和单位球分别记为 o,S^{n-1} 和 B. 若 $u\in S^{n-1}$, 则 $u^\perp$ 表示垂直于 u 的 $n-1$ 维子空间， l_u 表示过原点平行于方向 u 的直线.

若过点 x 的每条直线与 E^n 中的集合 L 相交于一条 (可能退化的) 闭线段，则称 L 关于点 x 是星形的. 如果集合 L 是非空紧集且关于点 x 是星形的，那么 L 在点 x 的径向函数 $\rho_L(x,u)$ 定义为

$$\rho_L(x,u)=\max\{c:x+cu\in L\},u\in S^{n-1}.$$

收稿日期: 2004-04-19
基金项目: 国家自然科学基金 (10271071)

特别地，将 $\rho_L(o,u)$ 简记为 $\rho_L(u)$.

如果 φ 是非奇异线性变换，则由径向函数的定义可得 [3]

$$\rho_{\varphi L(x,u)}=\rho_L(\varphi^{-1}x,\varphi^{-1}u),\tag{1.1}$$

$$\rho_{\varphi L(u)}=\rho_L(\varphi^{-1}u).\tag{1.2}$$

用 λ_k 表示 E^n 中的 k 维 Lebesgue 测度 (等同于 k 维 Hausdorff 测度), 其中 $1\le k\le n$, 通常我们用 V 代替 λ_n. 对于 E^n 中的单位球 B, 有

$$\lambda_n(B)=\kappa_n,\quad \lambda_{n-1}(B)=\kappa_{n-1}.\tag{1.3}$$

如果 φ 是非奇异仿射变换，那么对于 E^n 中每一个 λ_n- 可测集 E[8], 有

$$V(\varphi E)=|\mathrm{det}\varphi|V(E).\tag{1.4}$$

特别当 $\lambda\ge 0$ 时，有

$$V(\lambda E)=\lambda^nV(E).\tag{1.5}$$

令 $u\in S^{n-1}$, E 为 E^n 中有界可测集，则 E 在 u 方向的 X 射线定义为 [3]

$$X_uE(x)=X_u1_E(x)=\lambda_1(E\cap(l_u+x)),\tag{1.6}$$

其中 $x\in u^\perp$, 1_E 是 E 的特征函数， X_u 是 X 射线变换.

设 K 是 E^n 中的凸体 (有非空内点的紧凸集) ，则 K 的差分体 $DK=K+(-K)$, 满足

$$\rho_{DK}(u)=\max_{x\in K}\rho_K(x,u)=\max_{y\in u^\perp}\lambda_1(K\cap(l_u+y)),\quad u\in S^{n-1}.\tag{1.7}$$

设 K 是 E^n 中的凸体且原点为其内点， K 的极体 K^* 定义为

$$K^*=\{x\in E^n|x\cdot y\le 1,y\in K\}.\tag{1.8}$$

Beta 函数定义为

$$B(p,q)=\int_0^1t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t.\tag{1.9}$$

2 椭球的 p 次径向平均体

对非负实数 $p>-1$, 凸体 K 的 p 次径向平均体 R_pK 的径向函数满足 [4]

$$\rho_{R_pK}(u)=(\frac{1}{V(K)}\int_K\rho_K(x,u)^p\mathrm{d}x)^{1/p},u\in S^{n-1}.\tag{2.1}$$

设 $u\in S^{n-1}$, K 是 E^n 中的凸体，令

$$E_K(r,u)=\{y\in u^\perp:X_uK(y)\ge r\},\tag{2.2}$$

则 K 的限制弦投影函数 $a_K(r,u)$ 定义为 [9]

$$a_K(r,u)=\lambda_{n-1}\left(E_K(r,u)\right),r\geq 0. \tag{2.3}$$

注意到：当 $r=0$ 时， $E_K(r,u)=K|u^{\perp}$ 且 $a_K(0,u)=h_{\Pi K}(u)$;

当 $r>\rho_{DK}(u)$ 时， $E_K(r,u)=\emptyset$ 且 $a_K(r,u)=0$.

定理 2.1 线性等价的凸体的 p 次径向平均体仍是线性等价的. 即, 若 φ 是一个线性变换, K 是 E^n 中的凸体， $p>-1$, 则

$$R_p(\varphi K)=\varphi(R_pK).$$

证明 设 $u\in S_{n-1}$. 利用 (1.1),(1.4) 和 (1.2), 得到

$$\begin{aligned}\rho_{R_p(\varphi K)}(u)&=(\frac{1}{V(\varphi K)}\int_{\varphi K}\rho_{\varphi K}(x,u)^p\mathrm{d}x)^{1/p}\\&=(\frac{1}{V(\varphi K)}\int_{\varphi K}\rho_K(\varphi^{-1}x,\varphi^{-1}u)^p\mathrm{d}x)^{1/p}\\&=(\frac{1}{|\mathrm{det}\varphi|}\frac{1}{V(K)}\int_K\rho_K(y,\varphi^{-1}u)^p|\mathrm{det}\varphi|\mathrm{d}y)^{1/p}\\&=\rho_{R_pK(\varphi^{-1}u)}=\rho_{\varphi(R_pK)}(u),\end{aligned}$$

故有 $R_p(\varphi K)=\varphi(R_pK)$. □

引理 2.2[4] 设 K 是 E^n 中的凸体， $u\in S^{n-1}$, 当 $p>-1$ 时，有

$$\int_K\rho_K(x,u)^p\mathrm{d}x=\int_0^{\rho_{DK}(u)}a_K(r,u)r^p\mathrm{d}r.$$

推论 2.3 一个原点对称的 n 维椭球的 p 次径向平均体仍是原点对称的 n 维椭球. 即，对于 E^n 中每一个原点对称的椭球 E, 有 $R_pE=aE$, 其中 a 是正常数.

证明 首先证明： E^n 中单位球 B 的 p 次径向平均体是球.

由 (2.2),(2.3) 式可知，单位球的限制弦投影函数为

$$a_B(r,u)=\lambda_{n-1}(\sqrt{1-(\frac{r}{2})^2}B). \tag{2.4}$$

由 (1.7), 得到

$$\rho_{DB}(u)=2,u\in S^{n-1}. \tag{2.5}$$

从引理 2.2, (2.4),(2.5) 和 (1.3), 有

$$\begin{aligned}\rho_{R_pB}(u)&=(\frac{1}{V(B)}\int_B\rho_B(x,u)^p\mathrm{d}x)^{1/p}=(\frac{1}{V(B)}\int_0^{\rho_{DB}(u)}a_B(r,u)r^p\mathrm{d}r)^{1/p}\\&=(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\int_0^2(1-\frac{r^2}{4})^{\frac{n-1}{2}}r^p\mathrm{d}r)^{1/p}.\end{aligned}$$

令 $r=2\sin\theta,\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 则

$$\rho_{R_pB}(u)=2(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(p))^{1/p},$$

其中 $K(p)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta\cos^n\theta\mathrm{d}\theta$, $p>-1$ 且 $p\neq 0$. 当 p 和 n 固定时， $K(p)$ 为大于 0 的常数，故 $\rho_{R_pB}(u)=aB$, 其中 a 为正实数.

设 E 是 E^n 中原点对称的 n 维椭球，则一定存在线性变换 φ, 使得 $E=\varphi B$. 由定理 2.1 可知

$$R_p(E)=R_p(\varphi B)=\varphi(R_pB)=\varphi(aB)=a\varphi B=aE.$$

我们还将证明椭球的 p 次径向平均体的一个有趣的性质.

定理 2.4 设 E 是 E^n 中原点对称的椭球， $p>-1,q>-1$ 且 $pq\neq 0$, 则

$$R_pR_qE=R_qR_pE.$$

证明 由推论 2.3 的证明可知 R_pB 是半径为 $a=2(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(p))^{\frac{1}{p}}$ 的球，则 R_pB 的限制弦投影函数

$$a_{R_pB}(r,u)=\lambda_{n-1}(\sqrt{a^2-(\frac{r}{2})^2}B).$$

利用引理 2.2 和积分变换，可推得

$$\begin{aligned}\rho_{R_qR_pB}(u)&=(\frac{1}{V(R_pB)}\int_{R_pB}\rho_{R_pB}(x,u)^q\mathrm{d}x)^{1/q}\\&=(\frac{\kappa_{n-1}}{a^n\kappa_n}\int_0^{2a}(a^2-\frac{r^2}{4})^{\frac{n-1}{2}}r^q\mathrm{d}r)^{1/q}\\&=(\frac{\kappa_{n-1}}{a^n\kappa_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)^{n-1}(2a\sin\theta)^q(2a\cos\theta)\mathrm{d}\theta)^{1/q}\\&=2a(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^q\theta\cos^n\theta\mathrm{d}\theta)^{1/q}\\&=4(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(p))^{1/p}(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(q))^{1/q}.\end{aligned}$$

同理可证

$$\rho_{R_pR_qB}(u)=4(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(q))^{1/q}(2\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}K(p))^{1/p}.$$

显然 $R_qR_pB=R_pR_qB$.

因为 E 是原点对称的椭球，故存在线性变换 φ 满足 $E=\varphi B$. 由定理 2.1 知

$$R_pR_qE=R_pR_q(\varphi B)=R_p(\varphi(R_qB))=\varphi(R_pR_qB),$$

同理有 $R_qR_pE=\varphi(R_qR_pB)$. 显然结论成立. □

猜测 对于一般凸体 K, 是否存在 $R_pR_qK=R_qR_pK$?

3 关于推广后的 p 次径向平均体的不等式

设 μ 是 E^n 中有对数凹性的测度，即对 E^n 中的所有凸体 K 和 L, $0\leq a\leq 1$, 有

$$\mu((1-a)K+aL)\geq\mu(K)^{(1-a)}\mu(L)^a.$$

Gardner 和张高勇还对凸体的 p 次径向平均体进行了推广 [4]:

设 K,L 是 E^n 中的凸体，满足 $K\subseteq L$, 则 K 和 L 的 p 次径向平均体 $R_p(K,L,\mu)$ 满足

$$\rho_{R_p(K,L,\mu)}(u)=(\frac{1}{\mu(K)}\int_K\rho_L(x,u)^p\mathrm{d}\mu(x))^{1/p},\tag{3.1}$$

其中 $u\in S^{n-1},p>-1$.

根据 E^n 中的 Brunn-Minkowski 不等式的第一形式 [2], 可知 n 维 Lebesgue 测度 λ_n 是对数凹的．则不妨将 (3.1) 变为

$$\rho_{R_p(K,L,\lambda_n)}(u)=(\frac{1}{V(K)}\int_K\rho_L(x,u)^p\mathrm{d}x)^{1/p}.\tag{3.2}$$

Blaschke-Santaló 不等式是凸体几何中最重要的两个仿射等周不等式之一 [1,5−8], 主要描述了中心对称的凸体及其极体的体积乘积的上界问题. 与此相对应, 我们建立了一个关于推广后的 p 次径向平均体的反向不等式.

引理 3.1[2]　设 K,L 是 E^n 中的凸体，$x\in E^n$, 那么函数 $g_{K,L}(x)=V(K\cap(L+x))^{\frac{1}{n}}$ 在其支撑上是凹函数.

引理 3.2[7]　设 K,L 是 E^n 中的凸体, 且原点为它们的内点. 如果 $K\subseteq L$, 那么有 $K^*\supseteq L^*$.

定理 3.3　设 K 是 E^n 中的凸体，且原点为其内点，B_1 和 B_2 分别是包含在 K 中的最大的球和包含 K 的最小的球．当 $p>-1$ 时，有

$$V(R_p(B_1,K))V(R_p(B_2^*,K^*))\geq(2C_{n,p})^{2n}(\frac{r}{R})^nk_n^2,$$

其中 r 和 R 分别是 B_1 和 B_2 的半径，$c_{n,p}=(p\ B(p,n+1))^{1/p}$, 当且仅当 K 是球时等号成立.

证明　不妨设 B_1 的半径为 r, 则 $u\in S^{n-1}$ 时，$\rho_{DB_1}(u)=2r$, 有

$$\begin{aligned}\rho^p_{R_p(B_1,K)(u)}&=\frac{1}{V(B_1)}\int_{B_1}\rho^p_K(x,u)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{V(B_1)}\int_{B_1}(p\int_0^{\rho_K(x,u)}t^{p-1}\mathrm{d}t)\mathrm{d}x\\&=\frac{p}{V(B_1)}\int_0^{\rho_{DB_1}(u)}(\int_{B_1\cap(K+tu)}\mathrm{d}x)t^{p-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{V(B_1)}\int_0^{\rho_{DB_1}(u)}V(B_1\cap(K+tu))t^{p-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{V(B_1)}\int_0^{2r}V(B_1\cap(K+tu))t^{p-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由引理 3.1 知 $g_{B_1,K}(tu)^{\frac{1}{n}}=V(B_1\cap(K+tu))^{\frac{1}{n}}$ 是在支撑 DB_1 上是凹函数，所以当 $0\leq t\leq 2r$ 时,

$$V(B_1\cap(K+tu))\geq V(B_1)(1-\frac{t}{2r})^n.$$

则

$$\begin{aligned}\rho_{R_p(B_1,K)(u)}&\geq(\frac{p}{V(B_1)}\int_0^{2r}V(B_1)(1-\frac{t}{2r})^nt^{p-1}\mathrm{d}t)^{1/p}\\&=(p\int_0^{2r}(1-\frac{t}{2r})^nt^{p-1}\mathrm{d}t)^{1/p}=2r(p\int_0^1(1-y)^ny^{p-1}\mathrm{d}y)^{\frac{1}{p}}\\&=2rc_{n,p}=2c_{n,p}\rho_{B_1}(u).\end{aligned}$$

即 $R_p(B_1,K)\supseteq 2c_{n,p}B_1$, 所以有

$$V(R_p(B_1,K))\geq (2c_{n,p})^nV(B_1). \tag{3.3}$$

根据引理 3.2 可知，由于 $B_2\supseteq K$, 所以 $B_2^*\subseteq K^*$. 同理可得

$$V(R_p(B_2^*,K^*))\geq (2c_{n,p})^nV(B_2^*). \tag{3.4}$$

已知 B_1,B_2 的半径分别为 r,R, 根据 (1.5) 式和极体的定义 (1.8), 有

$$V(B_1)=r^n\kappa_n,\quad V(B_2^*)=\frac{1}{R^n}\kappa_n. \tag{3.5}$$

结合 (3.3),(3.4) 和 (3.5) 式，得到

$$V(R_p(B_1,K))V(R_p(B_2^*,K^*))\geq (2c_{n,p})^{2n}V(B_1)V(B_2^*)=(2C_{n,p})^{2n}(\frac{r}{R})^n\kappa_n^2.$$

致谢 感谢冷岗松教授对本文的悉心指导！

参考文献:

[1] BLASCHKE W. *Über affine geometric VII:neue extremeigenschaften von ellipse und ellipsoid* [J]. Leipziger Berichte, 1917, **69**: 306–318.

[2] GARDNER R J. *The Brunn-Minkowski inequality* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 2002, **39**: 355–405.

[3] GARDNER R J. *Geometric Tomography* [M]. Cambridge Univ. Press, New York, 1995.

[4] GARDNER R J, ZHANG Gao-yong. *Affine inequalities and radial mean bodies* [J]. Amer. J. Math., 1998, **120**: 505–528.

[5] PETTY C M. *Affine isoperimetric problems* [J]. Ann. N.Y.Acad. Sci., 1985, **440**: 113–127.

[6] SANTALÓ L A. *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones* [J]. Portugal. Math., 1949, **8**: 155–161.

[7] SCHNEIDER R. *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory* [M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[8] WEIR A. *Lebesgue Integration and Measure* [M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[9] ZHANG Gao-yong. *Restricted chord projection and affine inequalities* [J]. Geom. Dedicata, 1991, **39**: 213–222.

Several Properties of the Radial pth Mean Bodies of Convex Bodies

YUAN Shu-feng[1,2], *ZHANG Hai-juan*[2], *YUAN Jun*[3]

(1. Shangyu College, Shaoxing University, Zhejiang 312300, China;
2. Inst. of Appl. Math. Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China;
3. Dept. of Math., Shanghai University, Shanghai 200444, China;)

Abstract: This paper proves that the radial pth mean body is invariant under a general linear transformation and that the radial pth mean body of an ellipsoid is an ellipsoid. And corresponding to the Blaschke-Santaló inequality, a reverse inequality for the radial pth mean body is given.

Key words: the radial pth mean body; convex body; radial function.