第26卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.26, No.4
2006年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0778-07　　**文献标识码**: **A**

同分布的 NA 序列加权和的强大数律

邱德华 [1]， 杨向群 [2]

(1. 广东商学院数学与计算科学系，广东　广州 510320;
2. 湖南师范大学数学与计算机科学学院，湖南　长沙 410081)
(E-mail: qiudhua@sina.com)

摘　要: 讨论了同分布 NA 随机变量序列加权和的强大数律, 所得结果推广了 Z.D.Bai 和 P.E.Cheng 及 S.H.Sung 的结果.

关键词: NA 的随机变量序列；加权和；同分布；完全收敛；强大数律.
MSC(2000): 60F15
中图分类: O211.4

1 引 言

Joag-Dev 和 Proschan[1] 于 1983 年提出的一类重要的相依随机变量 -NA (negatively-associated) 随机变量:

定义　称随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n(n\geq 2)$ 为 NA 的，如果对于 $\{1,2,\cdots n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 T_1 和 T_2, 都有 $\operatorname{cov}(f_1(X_i,i\in T_1),f_2(X_j,j\in T_2))\leq 0$. 其中 f_1 和 f_2 是任何两个使上述协方差存在的且对每个变元均非降 (或均非升) 的函数；称 $\{X_i,i\geq 1\}$ 是 NA 序列，如果对任何自然数 $n\geq 2,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是 NA 的；称 $\{X_{ni},i,n\in N\}$ 是行为 NA 的随机变量阵列，若对任何自然数 n,$\{X_{ni},i\geq 1\}$ 都是 NA 的.

NA 随机变量在可靠性理论，渗透理论及多元统计分析中有广泛的应用，对其极限理论的研究有十分重要的意义．本文旨在将文献 [2,3] 中关于独立同分布序列的若干强大数律推广到 NA 序列情形，由于在处理随机变量时，截断随机变量的取法不同，从而证明方法比 [2,3] 要简便得多.

设 $\{a_{ni},1\leq i\leq n,n\geq 1\}$ 是实常数阵列， $A^\alpha_{\alpha,n}=n^{-1}\sum_{i=1}^n|a_{ni}|^\alpha$, 且设

$$A_\alpha=\limsup_{n\to\infty}A_{\alpha,n}<\infty. \tag{1}$$

引理 1　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 NA 的， $EX_k=0,\ \sigma_k^2=EX_k^2<\infty\ (k=1,2,\cdots,n)$, 且存在正的常数 H, 使得对一切整数 $m\geq 2$, 都有

$$|EX_k^m|\leq\frac{m!}{2}\cdot\sigma_k^2\cdot H^{m-2}\ \ (k=1,2,\cdots,n),$$

则

$$p(\sum_{i=1}^nX_i\geq x)\leq\exp(-x^2/4\sum_{i=1}^n\sigma_i^2),\quad 0\leq x\leq\sum_{i=1}^n\sigma_i^2/H,$$

收稿日期: 2004-11-29
基金项目: 湖南省自然科学基金 (04JJ40009)

$$p(\sum_{i=1}^{n} X_i \le -x) \le \exp(-x^2/4\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2), \quad 0 \le x \le \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2/H.$$

证明 由 [4] 定理 2.5, 类似 [5] 定理 18 的证明可得.

引理 2 设 $\{X, X_n, n \ge 1\}$ 是同分布的随机变量序列，且存在 $h > 0, \gamma > 0$, 使

$$E[\exp(h|X|^{\gamma})] < \infty.$$

$\{X_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是行为 NA 随机变量阵列， $EX_{ni} = 0, 1 \le i \le n, n \ge 1, \{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是常数阵列，满足：

(i) 存在 $\beta, 0 < \beta \le \gamma$ 及常数列 $\{u_n, n \ge 1\}, \lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 使 $|a_{ni}X_{ni}| \le \frac{u_n|X_i|^{\beta}}{\log n}$ a.s.

(ii) 存在 $\delta > 0$ 及常数列 $\{v_n, n \ge 1\}, \lim_{n\to\infty} v_n = 0$, 使 $X_{ni}^2\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \le \frac{v_n|X_i|^{\delta}}{\log n}$ a.s., 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \xrightarrow{c} 0, \tag{3}$$

其中 $\xrightarrow{c}$ 表示完全收敛．特别地

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} \longrightarrow 0 \ \text{ a.s. } \ n \to \infty. \tag{4}$$

证明 由 [4] 定理 2.5, 类似 [3] 引理 1 的证明可证.

如果将引理 2 的条件 (2) 加强为：对任意的 $h > 0$ 及某 $\gamma > 0$, 使

$$E[\exp(h|X|^{\gamma})] < \infty. \tag{5}$$

条件 (i) 减弱为

(i′) 存在 $\beta, 0 < \beta \le \gamma$ 及常数 $C > 0$, 使

$$|a_{ni}X_{ni}| \le \frac{C|X_i|^{\beta}}{\log n} \ \text{ a.s.}$$

则我们有同样的结论成立，即

引理 3 设 $\{X_n, n \ge 1\}, \{X_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}, \{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 同引理 2, 若 (5),(i′),(ii) 成立，则 (3) 和 (4) 成立.

本文用 C 代表正常数，在不同的地方可表示不同的值，即使在同一式中也是如此.

2 主要结果及证明

定理 1 设 $\{X, X_n, n \ge 1\}$ 是同分布的 NA 序列， $\{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是满足条件 (1) 的常数阵列， $E|X|^{\beta} < \infty, EX = 0$, 其中： $1 < \alpha, \beta < \infty, 1 < p < 2$, 且 $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, 则

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \longrightarrow 0. \ \text{ a.s. } \ n \to \infty. \tag{6}$$

证明 不失一般性, 对任意的 $1 \le i \le n, n \ge 1$, 设 $a_{ni} > 0$, 则 $a_{n1}X_1, a_{n2}X_2, \cdots, a_{nn}X_n$ 是 NA 的. 而 $1 < \alpha, \beta < \infty, 1 < p < 2$, 且 $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, 则 $p < \alpha \wedge \beta \wedge 2$. 由 [6] 推论 3 及 (1) 得

$$\begin{aligned} E|n^{-1/p}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i|^{\alpha\wedge\beta\wedge 2} &\le Cn^{-\alpha\wedge\beta\wedge 2/p}\sum_{i=1}^n |a_{ni}|^{\alpha\wedge\beta\wedge 2}\cdot E|X|^{\alpha\wedge\beta\wedge 2} \\ &\le Cn^{-\alpha\wedge\beta\wedge 2/p+1}\cdot A_{\alpha\wedge\beta\wedge 2,n}^{\alpha\wedge\beta\wedge 2} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

则

$$n^{-1/p}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \xrightarrow{p} 0, \quad n\to\infty.$$

由对称化不等式 [5, 引理14], 要证 (6), 只须证明

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i^S \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \ \ n\to\infty,$$

其中 X_n^s 是 X_n 的对称化, 由 [7] 可知 NA 序列的对称化序列仍然是 NA 的, 故不失一般性, 我们可设 $\{X_n, n\ge 1\}$ 是对称的 NA 序列.

对任意的 $1 \le i \le n, n \ge 1$, 令

$$\begin{aligned} X_i' &= X_iI(|X_i| \le n^{1/\beta}) + n^{1/\beta}I(X_i > n^{1/\beta}) - n^{1/\beta}I(X_i < -n^{1/\beta}), \\ X_i'' &= X_iI(|X_i| > n^{1/\beta}) - n^{1/\beta}I(X_i > n^{1/\beta}) + n^{1/\beta}I(X_i < -n^{1/\beta}), \\ \bar{X}_i'' &= X_iI(|X_i| > n^{1/\beta}), \\ a_{ni}' &= a_{ni}I(|a_{ni}| \le n^{1/\alpha}), \\ a_{ni}'' &= a_{ni} - a_{ni}' = a_{ni}I(|a_{ni}| > n^{1/\alpha}), \end{aligned}$$

则

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i = \sum_{i=1}^n a_{ni}'X_i' + \sum_{i=1}^n a_{ni}''X_i' + \sum_{i=1}^n a_{ni}X_i''. \tag{7}$$

因为 $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}\{1 + \beta(1-\frac{1}{p})\}$, 则

$$|\bar{X}_i''| \le |\bar{X}_i''|^{\beta(\alpha-1)/\alpha}\cdot n^{-(1-1/p)}. \tag{8}$$

又 $E|X|^\beta < \infty$ 等价于 $\sum_{n=1}^\infty P(|X|^\beta > n) < \infty$, 从而 $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n|^\beta > n) < \infty$, 由 Borel-Cantelli 引理, 可得 $P(|X_n|^\beta > n, \text{i.o.}) = 0$, 故

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\bar{X}_i''|^\beta \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \ \ n\to\infty. \tag{9}$$

由 Hölder 不等式, $|X_i''| \le |\bar{X}_i''|$ 及 (8),(9), 有

$$\begin{aligned} n^{-1/p}|\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i''| &\le n^{-1/p}\sum_{i=1}^n |a_{ni}||\bar{X}_i''| \le n^{-1}\sum_{i=1}^n |a_{ni}||\bar{X}_i''|^{\beta(\alpha-1)/\alpha} \\ &\le A_{\alpha,n}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |\bar{X}_i''|^\beta)^{(\alpha-1)/\alpha} \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \ \ n\to\infty. \end{aligned}$$

从而

$$n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i'' \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n\to\infty. \tag{10}$$

由 $\frac{1}{p}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, 1<p<2$, 故有 $\alpha\vee\beta<2$, 从而

$$1+\frac{(2-\alpha)^+}{\alpha}+\frac{(2-\beta)^+}{\beta}=\begin{cases}\frac{2}{\alpha\wedge\beta}, & \text{如果} \quad \alpha\wedge\beta<2;\\ 1, & \text{如果} \quad \alpha\wedge\beta\geq 2.\end{cases}$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{n}E(a_{ni}^{'}X_i^{'})^2\leq CnA_{\alpha\wedge 2,n}^{\alpha\wedge 2}\cdot n^{(2-\alpha)^+/\alpha+(2-\beta)^+/\beta}\cdot ||X||_{\beta\wedge 2}^{\beta\wedge 2}=O(\max\{n^{2/\alpha},n^{2/\beta},n\}).$$

另一方面，对任意的 $1\leq i\leq n, n\geq 1$, 有 $|n^{-1/p}a_{ni}^{'}X_i^{'}|\leq n^{1/\alpha}n^{1/\beta}n^{-1/p}=1$, 及 $\max\{n^{2/\alpha},n^{2/\beta},n\}=o(n^{2/p}\log^{-2}n)$, 由引理 1, 对充分小的 ε, 充分大的 n, 有

$$\begin{aligned}p(n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{'}X_i^{'}>\varepsilon)&\leq \exp(\frac{-\varepsilon^2}{4n^{-2/p}O(\max\{n^{2/\alpha},n^{2/\beta},n\})})\\ &\leq \exp(-\varepsilon^2(\log n)^2).\end{aligned}$$

同理可证

$$p(n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}'X_i'<-\varepsilon)\leq \exp(-\varepsilon^2(\log n)^2),$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(n^{-1/p}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}'X_i'|>\varepsilon)<\infty.$$

从而

$$n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}'X_i' \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n\to\infty. \tag{11}$$

因为 $\alpha>1, \frac{1}{p}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, 故有

$$\begin{aligned}n^{-1/p}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}''X_i'|&\leq n^{-1/p}n^{1/\beta}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|I(a_{|ni|}>n^{1/\alpha})\leq n^{-1/p+1/\beta}\cdot n^{(1-\alpha)/\alpha}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{\alpha}\\ &=A_{\alpha,n}^{\alpha}.\end{aligned} \tag{12}$$

由 (7),(10),(11),(12) 有

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}n^{-1/p}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i|\leq A_{\alpha}^{\alpha}, \quad \text{a.s.} \quad n\to\infty.$$

在上式中，把 X_i 用 tX_i 取代，则有

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}n^{-1/p}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i|\leq \frac{A_{\alpha}^{\alpha}}{t}, \quad \text{a.s.} \quad n\to\infty.$$

令 $t \longrightarrow \infty$, 则得 (6) 成立.

注 1 若对任意满足 (1) 的常数阵列 $\{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$, 都有 (6) 成立, 则 $E|X|^\beta < \infty, EX = 0$. 证明完全类似于 [2] 定理 2.1.

注 2 当 $\{X, X_n, n \ge 1\}$ 是 $i.i.d.$ 随机变量序列时, 定理 1 即为 [2] 中定理 2.1, 但证明要简便.

定理 2 设 $\{X, X_n, n \ge 1\}$ 是满足条件 (5) 的同分布的 NA 序列, $EX = 0, \{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是满足条件 (1) 的常数阵列, $1 < \alpha \le 2$,

1) 若 $0 < \gamma \le 1, b_n = n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$, 则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

2) 若 $\gamma > 1, b_n = n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma+\delta}$, 其中 $\delta = 1 - \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{1+\alpha\gamma-\alpha}$, 则 (13) 成立.

证明 不失一般性, 对任意的 $1 \le i \le n, n \ge 1$, 令 $a_{ni} > 0$, 由 [6] 推论 3 有

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i)^2 &\le \frac{EX^2}{b_n^2}\cdot\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \le \frac{EX^2}{b_n^2}\cdot(\sum_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha)^{2/\alpha} \\ &= \frac{1}{b_n^2}EX^2\cdot A_{\alpha,n}^2\cdot n^{2/\alpha} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i \xrightarrow{p} 0, \quad n \to \infty.$$

故与定理 1 类似, 我们可设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是对称的 NA 序列.

i) $0 < \gamma \le 1$

对任意的 $1 \le i \le n, n \ge 1$, 令

$$X'_{ni} = X_iI(|X_i| \le (\log n)^{1/\gamma}) + (\log n)^{1/\gamma}I(X_i > (\log n)^{1/\gamma}) - (\log n)^{1/\gamma}I(X_i < -(\log n)^{1/\gamma}),$$

$$X''_{ni} = X_iI(|X_i| > (\log n)^{1/\gamma}) - (\log n)^{1/\gamma}I(X_i > (\log n)^{1/\gamma}) + (\log n)^{1/\gamma}I(X_i < -(\log n)^{1/\gamma}).$$

由于 $Ee^{|X|^\gamma} < \infty$ 等价于 $\sum_{n=1}^n P(|X| > (\log n)^{1/\gamma}) < \infty$, 类似定理 1 有

$$\frac{1}{b_n}|\sum_{i=1}^n a_{ni}X''_{ni}| \le \frac{1}{b_n}\max_{1\le i\le n}|a_{ni}|\sum_{i=1}^n |X''_{ni}| \le A_{\alpha,n}\sum_{i=1}^n \frac{|X''_{ni}|}{(\log n)^{\frac{1}{r}}} \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n \longrightarrow \infty \tag{14}$$

又 $\{X'_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是行为 NA 的随机变量阵列, 而

$$|\frac{1}{b_n}a_{ni}X'_{ni}| \le \frac{1}{b_n}|a_{ni}|\cdot(\log n)^{(1-\gamma)/\gamma}|X_i|^\gamma \le \frac{1}{b_n}A_{\alpha,n}n^{1/\alpha}(\log n)^{(1-\gamma)/\gamma}|X_i|^\gamma = A_{\alpha,n}\frac{|X_i|^\gamma}{\log n}, \tag{15}$$

$${X'_{ni}}^2\sum_{i=1}^n(\frac{a_{ni}}{b_n})^2 \le X_i^2\frac{1}{b_n^2}\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \le A_{\alpha,n}^2\frac{X_i^2}{(\log n)^{2/\gamma}}. \tag{16}$$

由 (15),(16) 及引理 3, 有

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X'_{ni} \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty. \tag{17}$$

由 (14),(17) 得 (13) 成立.

ii) $\gamma > 1$

设

$$X'_{ni} = X_i I(|X_i| \le (\log n)^{\delta_1}) + (\log n)^{\delta_1} I(X_i > (\log n)^{\delta_1}) - (\log n)^{\delta_1} I(X_i < -(\log n)^{\delta_1})$$

$$X''_{ni} = X_i I(|X_i| > (\log n)^{\delta_1}) - (\log n)^{\delta_1} I(X_i > (\log n)^{\delta_1}) + (\log n)^{\delta_1} I(X_i < -(\log n)^{\delta_1})$$

$a'_{ni} = a_{ni} I(|a_{ni}| \le \frac{n^{1/\alpha}}{(\log n)^{\delta_2}})$

$a''_{ni} = a_{ni} - a'_{ni}$, 其中 $\delta_1 = \frac{1}{(1+\alpha\gamma-\alpha)}, \delta_2 = 1 - \frac{1}{\gamma} - \delta$, 则

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i = \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a'_{ni}X'_{ni} + \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a''_{ni}X'_{ni} + \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^n a_{ni}X''_{ni} \triangleq A_n + B_n + C_n. \tag{18}$$

又由于 $\{X'_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是行为 NA 的随机变量阵列，则

$$|b_n^{-1} a'_{ni} X'_{ni}| \le b_n^{-1}|a'_{ni}||X_i| \le \frac{n^{1/\alpha}}{b_n(\log n)^{\delta_2}}|X_i| = \frac{1}{\log n}|X_i|, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} {X'_{ni}}^2 \sum_{i=1}^n b_n^{-2} {a'_{ni}}^2 &\le \frac{n^{(2-\alpha)/\alpha}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha}{b_n^2(\log n)^{\delta_2(2-\alpha)}} {X'_{ni}}^2 \le \frac{A_{\alpha,n}^\alpha n^{2/\alpha}}{b_n^2(\log n)^{\delta_2(2-\alpha)}} X_i^2 \\ &= \frac{A_{\alpha,n}^\alpha}{(\log n)^{2/\gamma + 2\delta + \delta_2(2-\alpha)}} X_i^2. \end{aligned} \tag{20}$$

由于 $\frac{2}{\gamma} + 2\delta + \delta_2(2-\alpha) = \frac{2+\alpha\gamma-\alpha}{1+\alpha\gamma-\alpha} > 1$, 从而由 (19),(20) 及引理 3 得

$$A_n \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty. \tag{21}$$

又

$$\begin{aligned} |B_n| &\le b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^n |a''_{ni}| = b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^n |a_{ni}| I(|a_{ni}| > \frac{n^{1/\alpha}}{(\log n)^{\delta_2}}) \\ &= b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha |a_{ni}|^{1-\alpha} I(|a_{ni}| > \frac{n^{1/\alpha}}{(\log n)^{\delta_2}}) \\ &\le b_n^{-1}(\log n)^{\delta_1}\sum_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha \cdot \left[\frac{n^{1/\alpha}}{(\log n)^{\delta_2}}\right]^{1-\alpha} \\ &= (n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma+\delta})^{-1} \cdot \frac{(\log n)^{\delta_1} \cdot n^{1/\alpha^{-1}}}{(\log n)^{(1-\alpha)\delta_2}} \sum_{i=1}^n |a_{ni}|^\alpha \\ &= A_{\alpha,n}^\alpha \end{aligned}$$

即

$$|B_n| \le A_{\alpha,n}^\alpha \tag{22}$$

如同 $0 < \gamma \le 1$ 一样，可证

$$C_n \longrightarrow 0, \quad \text{a.s.} \quad n \to \infty. \tag{23}$$

由 (18),(21),(22),(23) 得

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{b_n}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i|\le A_\alpha^\alpha,\quad \text{a.s.}$$

在上式中，把 X_i 用 tX_i 取代，则有

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{b_n}|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i|\le \frac{A_\alpha^\alpha}{t},\quad \text{a.s.}$$

令 $t\longrightarrow\infty$, 则得 (13) 式成立.

注 3 若对任意满足 (1) 的常数阵列 $\{a_{ni},1\le i\le n,n\ge 1\}$, 都有 (13) 式成立，则 $EX=0$ 并且 (4) 式成立.

注 4 当 $\{X,X_n,n\ge 1\}$ 是 i.i.d 随机变量序列时，定理 2 及下面的定理 3 分别为 [3] 中定理 1 与定理 2, 但证明要简便得多.

类似定理 2 的证明，我们有

定理 3 假设 $\{X,X_n,n\ge 1\}$ 是满足条件 (2) 的同分布的 NA 序列， $EX=0,\{a_{ni},1\le i\le n,n\ge 1\}$ 是满足条件 (1) 的常数阵列， $1<\alpha\le 2$, 则下述结论成立：

(i) 若 $0<\gamma\le 1, b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma+\beta},(\beta>0)$, 则 (13) 式成立；

(ii) 若 $\gamma>1, b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma+\delta+\beta},(\beta>0)$, 其中 $\delta=1-\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma-1}{1+\alpha\gamma-\alpha}$, 则 (13) 式成立.

参考文献:

[1] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. *Negative association of random variables, with applications* [J]. Ann. Statist., 1983, **11**: 286–295.

[2] BAI Z D, CHENG P E. *Marcinkiewicz strong laws for linear statistics* [J]. Statist. Probab. Lett., 2000, **46**: 105–112.

[3] SUNG S H. *Strong laws for weighted sums of i.i.d. random variables* [J]. Statist. Probab. Lett., 2001, **52**: 413–419.

[4] TAYLOR R L, PATTERSON R F, BOZORGNIA A. *A strong law of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables* [J]. Stochastic Anal. Appl., 2002, **20**: 643–656.

[5] PETROV B. *Sums of Independent Random Variable* [M]. Translated by SU Chun and HUANG Ke-ming, from Russian to Chinese, Hefei: USTC Press, 1991.

[6] 杨善朝. 随机变量部分和的矩不等式 [J]. 中国科学， 2000, **30**(3): 218–223.
YANG Shan-chao. *Moment inequalites for the partial sums of random variables* [J]. Sci. China, 2000, **30**(3): 218–223. (in Chinese)

[7] 迟翔，苏淳. 同分布 NA 序列的一个弱大数率 [J]. 应用概率统计， 1997, **13**(2): 199–203.
CHI Xiang, SU Chun. *A weak law of large numbers for identically distributed NA variables* [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 1997, **13**(2): 199–203. (in Chinese)

Strong Laws of Large Numbers for Weighted Sums of Identically Distributed NA Random Variables

QIU De-hua[1], *YANG Xiang-qun*[2]

(1. Dept. of Math., Guangdong Business College, Guangzhou 510320, China;
2. Math. & Comp. Sci. College, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: This paper deals with strong laws of large numbers for weighted sums of identically diseributed NA random variables and extends the theorems of Z.D.Bai, P.E.Cheng and S.H.Sung.

Key words: NA random variables; weighted sums; identically distributed ;complete convergence; strong laws of large numbers.