文章编号: 1000-341X(2007)02-0351-04　　**文献标识码**: **A**

关于多重联图的均匀全染色

马 刚[1], 张忠辅[2]

(1. 西北民族大学计算机科学与信息工程学院, 甘肃 兰州 730030;
2. 兰州交通大学应用数学研究所, 甘肃 兰州 730070)
(E-mail: jsmg@xbmu.edu.cn)

摘　要: 对一个正常的全染色满足各种颜色所染元素数 (点或边) 相差不超过 1 时, 称为均匀全染色, 其所用最少染色数称为均匀全色数. 本文证明了关于多重联图的若干情况下的均匀全色数定理, 得到了若干特殊多重联图的均匀全色数.

关键词: 联图; 均匀全染色; 均匀全色数.
MSC(2000): 05C15
中图分类: O157.5

1 引 言

图的染色是图论研究的主要内容之一, 继图的点染色、边染色以及全染色 [1–5] 之后, 人们又提出了均匀全染色的概念和猜想 [6–8]. 确定图的均匀全色数是一个十分困难的问题, 至今所知结果甚少. 本文探讨了多重联图的均匀全染色, 得到了若干结果和推论.

在以下的讨论中记: P_m 为 m 阶路; C_m 为 m 阶圈; S_m 为 $m+1$ 阶星; F_m 为 $m+1$ 阶扇; W_m 为 $m+1$ 阶轮; K_p 为 p 阶完全图; $K_{m,n}$ 为完全二部图. 文中未加述及的术语、记号可参见文献 [1–3].

2 相关定义及引理

定义 2.1[2] 对简单图 $G(V,E)$ 的一个 k- 正常边染色法 f, 若满足 $\forall i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$, 有 $||E_i|-|E_j||\le 1$, 则称 f 为 G 的一个 k- 均匀边染色法, 简记作 k-EC of G. 而称

$$\chi'_e(G)=\min\{k|k\text{-EC of }G\}$$

为 G 的均匀边色数. 其中 $E_i=\{e|e\in E(G),f(e)=i\}$.

定义 2.2[6–8] 对简单图 $G(V,E)$ 的一个 k- 正常全染色法 f, 若满足 $\forall i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$, 有 $||S_i|-|S_j||\le 1$, 则称 f 为 G 的一个 k- 均匀全染色法, 简记作 k-ETC of G. 而称

$$\chi_{et}(G)=\min\{k|k\text{-ETC of }G\}$$

为 G 的均匀全色数. 其中

$$S_i=V_i\cup E_i,\ \ V_i=\{v|v\in V(G),f(v)=i\},\ \ E_i=\{e|e\in E(G),f(e)=i\}.$$

收稿日期: 2005-11-24; **接受日期**: 2006-08-26
基金项目: 国家自然科学基金 (40301037); 国家民委科研项目 (05XB07).

猜想 2.1[6−8] 对简单图 G, 有

$$\chi_{et}(G) \leq \Delta(G)+2, \quad \text{且} \quad \chi_{et}(G)=\chi_t(G),$$

其中 $\chi_t(G)$ 为 G 的全色数, ΔG 表示 G 的最大度.

定义 2.3[2] 对点、边均不相交的简单图 G,H, 若 $G\vee H$ 满足: $V(G\vee H)=V(G)\cup V(H)$; $E(G\vee H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv|u\in V(G), v\in V(H)\}$. 则称 $G\vee H$ 为 G 与 H 的联图.

由定义 2.3 可以推广到若 r 个简单图 $G_1,G_2,\ldots,G_r$ 中任意两个点、边均不相交, 则将其联图 $G_1\vee G_2\vee\cdots\vee G_r$ 称之为 r 重联图, 简记为 $\bigvee_{i=1}^r G_i$. 若 G_i 均同构于 G, 简记为 $K(G,r)$.

引理 2.1[6−8] 对简单图 G, 有 $\chi_{et}(G)\geq\Delta(G)+1$.

引理 2.2[2] 对简单图 G, 有 $\chi'_e(G)\geq\Delta(G)$.

由于对简单图 G,H, 有 $\chi'_e(G)=\chi'(G)$[6]; 若 $H\subseteq G$, 有 $\chi'(H)\leq\chi'(G)$[1,2]. 其中 $\chi'(G)$ 表示 G 的正常边色数. 从而有下述引理 2.3 和 2.4.

引理 2.3 对简单图 G,H, 若 H 是 G 的子图, 则有 $\chi'_e(H)\leq\chi'_e(G)$.

引理 2.4 对 p 阶完全图 K_p, 有

$$\chi'_e(K_p)=\begin{cases} p, & p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\\ p-1, & p\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

引理 2.5[6−8] 对 p 阶完全图 K_p, 有

$$\chi_{et}(K_p)=\begin{cases} p, & p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2);\\ p+1, & p\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

引理 2.6[2,5] 对简单图 G, 若 $G[V_\Delta]$ 无圈, 则有 $\chi'_e(G)=\Delta(G)$, 其中

$$V(G[V_\Delta])=V_\Delta=\{v|d(v)=\Delta(G), v\in V(G)\},\ E(G[V_\Delta])=\{uv|u,v\in V_\Delta, uv\in E(G)\}.$$

3 主要结论

定理 3.1 对于简单图 $G_1,G_2,\ldots,G_r$, 若存在 $\lambda\in\{1,2,\ldots,r\}$, 使得 $\Delta(G_\lambda)=|V(G_\lambda)|-1$, 且 $|V(\bigvee_{i=1}^r G_i)|=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^r G_i)=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|$.

证明 记 $n=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|$, 则 $\Delta(\bigvee_{i=1}^r G_i)=n-1$, 由引理 2.1 知 $\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^r G_i)\geq n$, 要证定理为真仅需证明 $\bigvee_{i=1}^r G_i$ 存在一个 n-ETC 法. 设 $w\notin V(\bigvee_{i=1}^r G_i)$, 作 $G^*=(\bigvee_{i=1}^r G_i)\vee\{w\}$, 则 $\Delta(G^*)=n$, $G^*\subseteq K_{n+1}$, 且 $n+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$. 从而由引理 2.2, 2.3 和 2.4 知 $\chi'_e(G^*)=n$. 设 f^* 为 G^* 的一个 n -EC 法, 令 f 为: $f(u)=f^*(wu), u\in V(\bigvee_{i=1}^r G_i)$; $f(uv)=f^*(uv), uv\in E(\bigvee_{i=1}^r G_i)$.

自然 f 是 $\bigvee_{i=1}^r G_i$ 的 n-ETC 法, 从而定理 3.1 为真.

推论 3.1 对于简单图 $G_1,G_2,\ldots,G_r$, 若 $\sum_{i=1}^r|V(G_i)|+m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, 则:

(i) $\chi_{et}(S_m\vee(\bigvee_{i=1}^r G_i))=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|+m+1\ \ (m\geq 1)$;

(ii) $\chi_{et}(F_m\vee(\bigvee_{i=1}^r G_i))=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|+m+1\ \ (m\geq 2)$;

(iii) $\chi_{et}(W_m\vee(\bigvee_{i=1}^r G_i))=\sum_{i=1}^r|V(G_i)|+m+1\ \ (m\geq 3)$.

推论 3.2 对于简单图 $G_1, G_2, \ldots, G_r$, 若 $\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|+p\equiv 1 \pmod 2$, 则

$$\chi_{et}(K_p\vee(\bigvee_{i=1}^{r}G_i))=\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|+p.$$

对于 r 个 m 阶的路，显然有 $K(P_1,r)=K_r$, $K(P_2,r)=K_{2r}$, 引理 2.5 已讨论，对 $K(P_3,r)$ 有

推论 3.3 对于 r 个 3 阶的路 P_3, 当 $r\equiv 1 \pmod 2$ 时，则 $\chi_{et}(K(P_3,r))=3r$.

定理 3.2 简单图 $G_1, G_2, \ldots, G_r$ 中, 若仅有一个 $G_\lambda(1\le\lambda\le r)$, 使得 $\Delta(G_\lambda)=|V(G_\lambda)|-1$, 且 G_λ 只有一个最大度点，而 $\Delta(G_i)\le|V(G_i)|-2, i\in\{1,2,\ldots,r\}\backslash\{\lambda\}$, 则

$$\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)=\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|.$$

证明 记 $n=\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|$, 则 $\Delta(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)=n-1$, 由引理 2.1 知 $\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)\ge n$, 要证定理为真仅需证明 $\bigvee_{i=1}^{r}G_i$ 存在一个 n -ETC 法. 设 $w\notin V(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)$, 作 $G^*=(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)\vee\{w\}$, 则 G^* 最大度点的导出图 $G[V_\Delta]$ 是二阶路，从而由引理 2.6 知 $\chi'_e(G^*)=\Delta(G^*)=n$. 设 f^* 为 G^* 的一个 n-EC 法，令 f 为

$$f(u)=f^*(wu), u\in V(\bigvee_{i=1}^{r}G_i);\ f(uv)=f^*(uv), uv\in E(\bigvee_{i=1}^{r}G_i).$$

自然 f 是 $\bigvee_{i=1}^{r}G_i$ 的 n-ETC 法，从而定理 3.2 为真.

推论 3.4 设简单图 $G_1, G_2, \ldots, G_r$ 中， G_i 是 $n_i(i\ge 4)$ 阶的路或圈， $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. 则：

(i) $\chi_{et}(S_m\vee(\bigvee_{i=1}^{r}G_i))=\sum_{i=1}^{r}n_i+m+1\ \ (m\ge 2)$;

(ii) $\chi_{et}(F_m\vee(\bigvee_{i=1}^{r}G_i))=\sum_{i=1}^{r}n_i+m+1\ \ (m\ge 4)$;

(iii) $\chi_{et}(W_m\vee(\bigvee_{i=1}^{r}G_i))=\sum_{i=1}^{r}n_i+m+1\ \ (m\ge 4)$.

定理 3.3 对于简单图 $G_1, G_2, \ldots, G_r$, 若总有 $\Delta(G_i)\le\mid V(G_i)\mid-2$, $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. 则

$$\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)\le\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|.$$

证明 设 $w\notin V(\bigvee_{i=1}^{r})$, 作 $G^*=(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)\vee\{w\}$, 则 $\Delta(G^*)=\sum_{i=1}^{r}\mid V(G_i)\mid=n$, 且 G^* 中仅有一个最大度点 w, 从而由引理 2.6 知 $\chi'_e(G^*)=n$. 设 f^* 为 G^* 的一个 n-EC 法，令 f 为

$$f(u)=f^*(wu), u\in V(\bigvee_{i=1}^{r}G_i);\ f(uv)=f^*(uv), uv\in E(\bigvee_{i=1}^{r}G_i).$$

自然 f 是 $\bigvee_{i=1}^{r}G_i$ 的 n-ETC 法，从而有 $\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^{r})\le n$, 定理 3.3 为真.

推论 3.5 对于简单图 $G_1, G_2, \ldots, G_r$, 若 $\Delta(G_i)\le\mid V(G_i)\mid-2, i\in\{1,2,\ldots,r\}$, 且至少存在一个 $\lambda\in\{1,2,\ldots,r\}$, 使得 $\Delta(G_\lambda)=\mid V(G_\lambda)\mid-2$. 则

$$\chi_{et}(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)\le\Delta(\bigvee_{i=1}^{r}G_i)+2.$$

证明 显然此时 $\Delta(\bigvee_{i=1}^{r} G_i)+2=\sum_{i=1}^{r}|V(G_i)|$, 从而由定理 3.3 可得.

推论 3.6 设简单图 $G_1,G_2,\ldots,G_r$ 中, G_i 是 $n_i(n_i\geq 4)$ 阶的路或圈, $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. 则

(i) $\chi_{et}(P_4\vee(\bigvee_{i=1}^{r} G_i))\leq\sum_{i=1}^{r} n_i+4$;

(ii) $\chi_{et}(C_4\vee(\bigvee_{i=1}^{r} G_i))\leq\sum_{i=1}^{r} n_i+4$;

(iii) $\chi_{et}(K_{m,3}\vee(\bigvee_{i=1}^{r} G_i))\leq\sum_{i=1}^{r} n_i+m+3\ \ (m\geq 3)$.

参考文献:

[1] YAP H P. *Total Colourings of Graphs* [M]. Lecture Notes in Mathematics, 1623. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.

[3] 田丰, 马仲番. 图与网络流理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
TIAN Feng, MA Zhong-fan. *Graph Theory and Network Flow Theory* [M]. Beijin: Science Press, 1987. (in Chinese)

[4] 张忠辅, 王建方. 关于图的全着色 – 一个综述 [J]. 数学进展, 1992, **21**(4): 390–397.
ZHANG Zhong-fu, WANG Jian-fang. *A summary of the progress on total colorings of graphs* [J]. Adv. in Math. (China), 1992, **21**(4): 390–397. (in Chinese)

[5] 张忠辅, 张建勋. 第 I 类图的若干充分条件 [J]. 数学杂志, 1985, **5**(2): 161–165.
ZHANG Zhong-fu, ZHANG Jian-xun. *Some sufficient conditions for a graph to be in the first class* [J]. J. Math. (Wuhan), 1985, **5**(2): 161–165. (in Chinese)

[6] ZHANG Zhong-fu, WANG Wei-fan, BAU Sheng, et al. *On the equitable total colorings of some join graphs* [J]. J. Inform. Comput. Sci., 2005, **2**(4): 829–834.

[7] WANG Wei-fan. *Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3* [J]. Graphs Combin., 2002, **18**(3): 677–685.

[8] 马刚, 张忠辅, 强会英. 关于 $Cm\vee Fn$ 的均匀全色数 [J]. 兰州交通大学学报, 2005, **24**(4): 147–149.
MA Gang, ZHANG Zhong-fu, QIANG Hui-ying. *On equitable total chromatic number of $Cm\vee Fn$* [J]. J. Lanzhou Railw. Univ. Nat. Sci., 2005, **24**(4): 147–149.

On the Equitable Total Coloring of Multiple Join-Graph

MA Gang[1], *ZHANG Zhong-fu*[2]

(1. College of Computer Science and Information Engineering, Northwest University for Nationalities, Gansu 730030, China;

2. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Gansu 730070, China)

Abstract: A total-coloring is called equitable if $||S_i|-|S_j||\leq 1$, where $|S_i|$ is the chromatic number of the color. The minimum number of colors required for an equitable proper total-coloring. A simple graph G is denoted by $\chi_{et}(G)$. In this paper, we prove theorems of equitable total coloring of multiple join-graph and get equitable total chromatic numbers of some special multiple join-graph.

Key words: join-graph; equitable total coloring; equitable total chromatic number.